Cvičenia z parciálnych diferenciálnych rovníc
Zimný semester 2010/2011

Príklady na precvičenie
Black-Scholesova PDR

1. Nech $V(S,t)$ je riešením Black-Scholesovej rovnice.
   (a) Dokážte, že potom aj $W(S,t) = S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t)$ je riešením Black-Scholesovej rovnice.
   (b) Použite tvrdenie z časti (a) na dôkaz toho, že ak $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,T) > 0$ pre každé $S > 0$, tak aj $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S,t) > 0$ pre každé $S > 0$ a $t \in (0,T)$. Toto tvdenie hovorí, že ak je cena derivátu v čase expirácie konvexnou funkciou ceny akcie, tak aj cena v ľubovoľnom inom čase je konvexná funkcia ceny akcie.

       Bez dôkazu môžete využiť nasledovné tvrdenie (dokážeme ho neskôr, keď sa budeme zaoberať parabolickými parciálnymi diferenciálnymi rovnicami): Ak $V(S,T) > 0$ pre každé $S > 0$, tak aj $V(S,t) > 0$ pre každé $S > 0$ a $t \in (0,T)$. To znamená, že ak je cena derivátu kladná v čase expirácie, tak aj jeho cena v ľubovoľnom čase je kladná. Takýto derivát nemôžeme dostať zadarmo, ani za jeho prevzatie dostať zaplatené.

2. Nájdite všetky také riešenia Black-Scholesovej rovnice, ktoré majú tvar $V = V(S)$, t. j. cena derivátu závisí len od ceny akcie.

   Návod: Pre V dostaneme lineárnu obyčajnú diferenciálnu rovnicu druhého rádu. Treba nájsť dve nezávislé riešenia, všeobecné riešenie je ich lineárnou kombináciou.

3. Nájdite všetky také riešenia Black-Scholesovej rovnice, ktoré majú tvar $V(S,t) = A(t)B(S)$.