Cvičenia z parciálnych diferenciálnych rovníc
Zimný semester 2010/2011

Príklady na precvičenie
Rovnica vedenia tepla na priamke

.

1. Nájdite riešenie $u(x,t)$ rovnice:

   (a) $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ \ x \in \mathbb{R}, t > 0,$
   $u(x,0) = 3e^{-4x} \ \ x \in \mathbb{R},$
   kde a je kladná konštanta.

   (b) $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-t}, \ \ x \in \mathbb{R}, t > 0,$
   $u(x,0) = 1 + 2x + 3x^2, \ \ x \in \mathbb{R}.$

   (c) $\frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u, \ \ x \in \mathbb{R}, t > 0,$
   $u(x,0) = 3e^{x}, \ \ x \in \mathbb{R}.$

2. Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ \ x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$u(x,0) = e^{-|x|}, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

   (a) Vypočítajte hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx$ pre každé $t > 0$.

   (b) Dokážte, že pre každé $t > 0$ a $x \in \mathbb{R}$ platí: $0 < u(x,t) < 1$.

   (c) Dokážte, že pre každé $t > 0$ je funkcia $u(x,t)$ párna funkcia premennej x.

3. Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{e^{-x^2}}{1+t^2}, \ \ x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$u(x,0) = \max(0, x(1-x)) \ \ x \in \mathbb{R}.$$

   Vypočítajte hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx$ pre každé $t > 0$ a limitu pre $t \to \infty$.

4. Nech a je kladná konštanta. Nech $u(x,t)$ je riešením rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ \ x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$u(x,0) = u_0(x) \ \ x \in \mathbb{R}$$

   a $v(x,t)$ je riešením rovnice

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \ \ x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

$$v(x,0) = v_0(x) \ \ x \in \mathbb{R},$$

   pričom platí

$$|u_0(x) - v_0(x)| < \varepsilon$$

   pre každé $x \in \mathbb{R}$. Dokážte, že potom

$$|u(x,t) - v(x,t)| < \varepsilon$$

   pre každé $t > 0$ a $x \in \mathbb{R}$.