Cvičenia z PDR 2010/2011

Projekt - Numerické riešenie PDR

Termín odovzdania: 17. decembra 2010

Pokyny

- Riešenie zahŕňa prehľadne spísané výsledky a komentáre (s grafmi a pod., môže byť písané na počítači pdf, doc) nie dlhšie ako 10 strán a osobitne zdrojové kódy programu (jeden zip/rar súbor).
- Zdrojové kódy pošlite mailom so predmetom **projekt - priezvisko** svojmu cvičiacemu. ML **martin.lauko.sk@gmail.com**, BS **bs.ulohy@gmail.com**.
- Spísaný text odovzdajte (preferovane vytlačenú hard-copy) svojmu cvičiacemu (osobne na cvičení, alebo ML M203, resp. BS M266), prípadne mailom spolu so zdrojákmi.
- Projekt riešte samostatne. Projekt nie je povinný, maximálne môžete získať **5 bodov**.

Zadanie

Tento rok sme sa učili hlavne o rovniciach, ktorých presné riešenie vieme analyticky vypočítať. V praxi sa však často môžeme stretnúť aj s úlohami, ktoré analyticky vyriešiť nevieme. Vtedy nám neostáva nič iné ako hľadať riešenie nejakou numerickou metódou. Ako na to?

Najskôr si zvolíme vhodnú sieť bodov, v ktorých budeme riešenie hľadať - riešenie v bode x_i, t_j označíme $u_{i,j}$, pričom $u_{i,j} \approx u(x_i, t_j)$. Namiesto derivácii použijeme pomerné diferencie:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{x_{i+1} - x_i}, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{t_{j+1} - t_j}$$

Takže využijete poznatky z numeriky. Alternatívne môžete použiť funkcie, ktoré ponúka Matlab (alebo aj porovnať oba spôsoby riešenia) - viď príslušná kapitola z knihy R. Bartko, M. Miller: Matlab I. Algoritmizácia a riešenie úloh (na konci tohto textu).

V oboch prípadoch platí nasledujúce zadanie: Zvoľte si počiatočnú podmienku (keďže ide o numerické riešenie, nie je dôvod obmedzovať sa na jednoduché funkcie typu x, x^2 a pod.), ktorá je v krajných bodoch rôzna od 0 a numericky vyriešte nasledujúce dve úlohy:

1.
$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad x \in (0,1),\ t > 0 \\ u(x,0) = u^0(x), \quad x \in [0,1] \\ u(0,t) = u^0(0),\ u(1,t) = u^0(1), \quad t > 0\end{gathered}$$

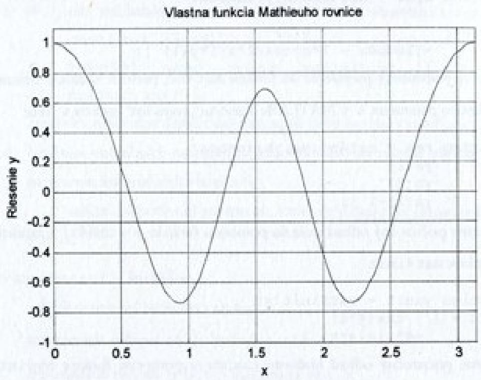
2.
$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad x \in (0,1),\ t > 0 \\ u(x,0) = u^0(x), \quad x \in [0,1] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \quad t > 0\end{gathered}$$

V prípade záujmu môžete **navyše** prvú úlohu riešiť aj s podmienkami v krajných bodoch závislými od t (napr. $u(0,t) = u^0(0) + \sin t$).

Pre každú úlohu zostrojte graf (horizontálna os - x, vertikálna os - riešenie) na ktorom bude začiatočná podmienka, riešenie v niekoľkých časoch a limita riešenia - tak, aby bolo vidieť konvergenciu k limite. Odovzdajte zadanie úloh, ktoré riešite, použité programy a výsledné grafy s legendou.

R. Bartko, M. Miller: Matlab I. Algoritmizácia a riešenie úloh,

aj na http://www.st.fmph.uniba.sk/~lauko5/?what=pdr



Obr. 9.3.1 Vlastná funkcia Mathieuvej rovnice

9.4 Parciálne diferenciálne rovnice

Na riešenie sústavy parciálnych diferenciálnych rovníc parabolického a eliptického typu (PDE), premennej x a času t v tvare

$$c\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial t} = x^{-m}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{m} f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right) + s\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad (9.4.1)$$

na intervale

$$t_S \le t \le t_F,\ a \le x \le b \qquad (9.4.2)$$

Interval $\langle a,b\rangle$ musí byť konečný a m môže nadobúdať hodnoty 0, 1, 2. Ak je $m>0$ musí byť aj $a \ge 0$. Člen $f(x,t,u,\partial u/\partial x)$ vyjadruje tok a člen $c(x,t,u,\partial u/\partial x)$ zdroj. Zviazanie parciálnych derivácií vzhľadom na čas je obmedzené násobením diagonálnou maticou $c(x,t,u,\partial u/\partial x)$. Diagonálne členy matice sú buď nulové (eliptická rovnica) alebo pozitívne (parabolická rovnica). Musí byť aspoň jedna parabolická rovnica. Prvok c, ktorý korešponduje s parabolickou rovnicou môže nadobúdať nulovú hodnotu v izolovaných bodoch x, ak tieto sú body sieťovania. Diskontuity v c a/alebo s spôsobené materiálovými rozhraniami sú dovolené a body siete sú umiestnené na každej strane

rozhrania. V začiatočnom čase $t = t_S$ zložky riešenia pre všetky x vyhovujú začiatočným podmienkam v tvare

$$u(x,t_S) = u_0(x) \qquad (9.4.3)$$

Na hraniciach $x=a$ a $x=b$ pre ľubovolné t vyhovujú zložky riešenia okrajovej podmienke v tvare

$$p(x,t,u) + q(x,t) f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \qquad (9.4.4)$$

kde $q(x,t)$ je diagonálna matica, ktorej prvky sú identické nuly alebo prvky, ktoré nikdy nenadobudnú nulovú hodnotu.

Tab. 9.4.1 Zoznam funkcií pre riešenie parciálnych diferenciálnych rovníc

Kategória	Funkcia	Popis
Riešič PDE	pdepe	riešenie parabolicko-eliptických PDE so zadanými počiatočnými a okrajovými podmienkami
Vstupné a výstupné funkcie	pdeval	interpoláciou vyhodnotí riešenie vypočítané PDEPE

Funkcia `pdepe` je riešič, ktorý konvertuje parciálne diferenciálne rovnice do obyčajných diferenciálnych rovníc pomocou presnej priestorovej diskretizácie druhého rádu založenej na množine uzlov, ktoré užívateľ špecifikoval. Časová integrácia využíva funkciu `ode15s`. Základná syntax funkcie je

```
sol=pdepe(m,pdefun,icfun,bcfun,xmesh,tspan,options)
```

kde vstupné argumenty sú:

`m` určuje symetriu úlohy (0 - rovinná, 1 - cylindrická, 2- sférická).

`pdefun` funkcia, ktorá definuje parciálnu diferenciálnu rovnicu. Je v tvare

```
[c,f,s] = pdefun(x,t,u,dudx)
```

kde `x` a `t` sú skaláry, `u` a `dudx` vektory.

`icfun` funkcia vyjadrujúca počiatočné podmienky, má tvar

```
u = icfun(x)
```

`bcfun` funkcia vyjadrujúca okrajové podmienky, má tvar

```
[pl,ql,pr,qr] = bcfun(xl,ul,xr,ur,t)
```

`xmesh` je vektor `[x0=a,x1,x2,...,xn=b]`, ktorý určuje body, v ktorých požadujeme numerické riešenie.

`tspan` je vektor `[t0,t1,t2,...,tn]`, ktorý určuje časy, v ktorých požadujeme numerické riešenie pre každý bod vo vektore `xmesh`.

Riešte parciálnu diferenciálnu rovnicu $\pi^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ na intervale $0 \le x \le 1$ pre čas $t \ge 0$.
Začiatočná podmienka má tvar $u(x,0) = \sin(\pi x)$ a okrajové podmienky majú tvar $u(0,t) = 0$ a $\pi e^{-t} + \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0$. Upravme si rovnicu do tvaru 9.4.1

$$\pi^2 \frac{\partial u}{\partial t} = x^0 \frac{\partial}{\partial t}\left(x^0 \frac{\partial u}{\partial t}\right) + 0 \tag{9.4.5}$$

a porovnaním dostávame parametre

$$\begin{aligned} c\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= \pi \\ f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ s\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{9.4.6}$$

Potom funkcia, v ktorej zapíšme parciálnu diferenciálnu rovnicu bude mať tvar

```
function [c,f,s] = pdex1pde(x,t,u,DuDx)
c = pi^2;
f = DuDx;
s = 0;
```

Zapíšeme počiatočné podmienky do funkcie

```
function u0 = pdex1ic(x)
u0 = sin(pi*x)
```

a okrajové podmienky prepíšeme do tvaru 9.3.5

$$\begin{aligned} x = 0 \qquad & u(0,t) + 0\,\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0 \\ x = 1 \qquad & \pi e^{-t} + 1\,\frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{9.4.7}$$

a vytvoríme funkciu

```
function [pl,ql,pr,qr] = pdex1bc(xl,ul,xr,ur,t)
pl = ul;
ql = 0;
pr = pi * exp(-t);
```



```
qr = 1;
```

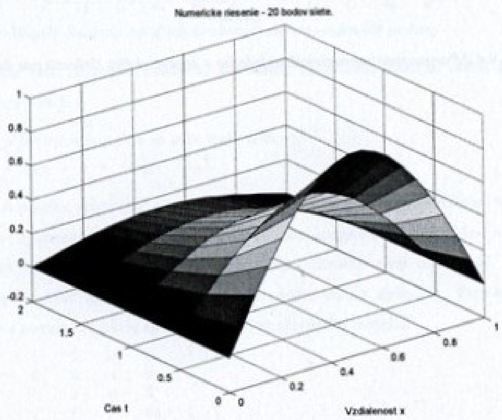
kde `pl` a `ql` reprezentuje ľavé okrajové podmienky pre `x=0` a `pr` a `qr` pravé okrajové podmienky pre `x=1`.

Určíme si body siete (t,x), v ktorých riešič vypočíta riešenie. Náročnosť a presnosť riešenia je silne závislá na dĺžke vektora x. Dĺžka vektora t ovplyvňuje výpočet menej. Rozdelíme interval, v ktorom hľadáme riešenie pre x $\langle 0,1 \rangle$ na 20 rovnako vzdialených bodov a časový interval $\langle 0,2 \rangle$ na 5 rovnako dlhých časových intervalov

```
x = linspace(0,1,20);
t = linspace(0,2,5);
```

Ukážme si riešenie a vykreslenie riešenia pomocou 3D grafu (Obr. 9.4.1). Pri riešení volá funkcia pdepe funkcie @pdex1pde, @pdex1ic, @pdex1bc, ktoré sme si vysvetlili v predchádzajúcej časti.

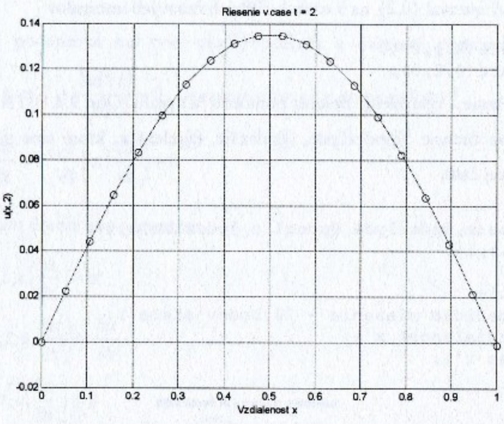
```
m = 0;
sol = pdepe(m,@pdex1pde,@pdex1ic,@pdex1bc,x,t);
u = sol(:,:,1);
figure;
surf(x,t,u);
title('Numericke riesenie - 20 bodov siete');
xlabel('Vzdialenost x');
ylabel('Cas t');
```



Obr. 9.4.1 Numerické riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice

Porovnajme presnosť numerického riešenia s analytickým riešením pre čas t=2. Riešenia sú vykreslené na Obr. 9.4.2.

```
figure;
plot(x,u(end,:),'o',x,exp(-t(end))*sin(pi*x));
grid
xlabel('Vzdialenost x');
ylabel('u(x,2)');
title('Riesenie v case t = 2.');
```



Obr. 9.4.2 Porovnanie numerického riešenia a analytického riešenia pre čas t = 0