Domáca úloha 1

2-EFM-107 Parciálne diferenciálne rovnice, 2022

Termín odovzdania: 10. 10. 2022 na začiatku cvičenia

V každom príklade riešte to zadanie, ktoré je napísané pri vašom mene v Google tabuľke.

Príklad 1: Overenie všeobecného riešenia (10 b.) a nájdenie riešenia so zadanou podmienkou (10 b.)

1. Ukážte, že funkcia $u(x,y) = x^2\Phi\left(\frac{y}{x^2}\right)$ je riešením parciálnej diferenciálnej rovnice $x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$. Nájdite také riešenie, ktoré spĺňa podmienku $u(x,1) = x^4$.
2. Ukážte, že funkcia $u(x,y) = x^2\Phi\left(\frac{y}{x^2}\right)$ je riešením parciálnej diferenciálnej rovnice $x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$. Nájdite také riešenie, ktoré spĺňa podmienku $u(2,y) = y^2$.
3. Ukážte, že funkcia $u(x,y) = x^2\Phi\left(\frac{x^2}{y}\right)$ je riešením parciálnej diferenciálnej rovnice $x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = 2u$. Nájdite také riešenie, ktoré spĺňa podmienku $u(x,x) = (1+x)^2$.
4. Ukážte, že funkcia $u(x,y) = y\Phi\left(x^2 - y^2\right)$ je riešením parciálnej diferenciálnej rovnice $y^2\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial u}{\partial y} = xu$. Nájdite také riešenie, ktoré spĺňa podmienku $u(x,2x) = 2x^3$.
5. Ukážte, že funkcia $u(x,y) = y\Phi\left(x^2 - y^2\right)$ je riešením parciálnej diferenciálnej rovnice $y^2\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial u}{\partial y} = xu$. Nájdite také riešenie, ktoré spĺňa podmienku $u(x,1) = x^4$.
6. Ukážte, že funkcia $u(x,y) = y\Phi\left(y^2 - x^2\right)$ je riešením parciálnej diferenciálnej rovnice $y^2\frac{\partial u}{\partial x} + xy\frac{\partial u}{\partial y} = xu$. Nájdite také riešenie, ktoré spĺňa podmienku $u(1,y) = y^4$

Príklad 2: Transformácia PDR na ODR a jej riešenie (10 b.)

1. Nájdite všeobecné riešenie rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

ktoré má tvar $u(x,y,z) = f(r)$, kde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2. Nájdite všeobecné riešenie rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

ktoré má tvar $u(x,y,z) = f(r)$, kde $r = (x^2+y^2+z^2)^3$.

3. Nájdite všeobecné riešenie rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

ktoré má tvar $u(x,y,z) = f(r)$, kde $r = (x^2+y^2+z^2)^2$.

4. Nájdite všeobecné riešenie rovnice

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

ktoré má tvar $u(x,y,z) = f(r)$, kde $r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$.

Príklad 3: Hľadanie riešenia PDR v špeciálnom tvare (10 b.)
Uvažujme rovnicu

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

kde $a > 0$ je konštanta. Odhadnutím tvaru riešenia a jeho dopočítaním nájdite riešenie $u(x,t)$ tejto rovnice, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku

1. $u(x,0) = 5e^{3x} - 2\sin(4x) + x$
2. $u(x,0) = e^{-x} - 2\cos(4x) + 2$
3. $u(x,0) = -e^{3x} + 5\sin(2x) + 1$
4. $u(x,0) = -5e^{3x} - 2\sin(4x) - x$
5. $u(x,0) = 2e^{-4x} - 2\cos(3x) + 3$