

Domáca úloha 3

2-EFM-107 Parciálne diferenciálne rovnice, 2022

Termín odovzdania: 24. 10. 2022 na začiatku cvičenia

V každom príklade riešte to zadanie, ktoré je napísané pri vašom mene v Google tabuľke.

Príklad 1: Riešenie PDR pomocou transformácie na ODR (20 b.)

Nájdite riešenie $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde n je prirodzené číslo väčšie ako 1. V určitom kroku výpočtu bude nutné rozlíšiť prípady $n = 2$ a $n \geq 3$ (veľká časť výpočtu sa však dá robiť pre všeobecné n). Za prípad $n = 2$ je 10 bodov, za prípad $n \geq 3$ tiež 10 bodov.

Hľadáme pritom radiálne symetrické riešenie danej rovnice, t. j. riešenie v tvare $u(x_1, \dots, x_n) = f(r)$, kde r je vzdialenosť bodu (x_1, \dots, x_n) od začiatku súradnicového systému, teda $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^2$
3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^3$

Príklad 2: Nájdenie prvého integrálu systému ODR (10 b.)

Nájdite integrál systému

$$\dot{x} = x^3 - 3xy^2, \dot{y} = 3x^2y - y^3$$

tak, že budete uvažovať

1. ODR pre funkciu $y = y(x)$,
2. ODR pre funkciu $x = x(y)$.

Nájdite úpravami taký integrál, ktorý neobsahuje logaritmus ani zložené zlomky.

Príklad 3: Nájdenie prvého integrálu systému ODR (10 b.)

Nájdite dva integrály (máme systém troch rovníc) systému:

$$1. \dot{x} = -4z - 2y, \dot{y} = 2x - 5z, \dot{z} = 5y + 4x$$

2. $\dot{x} = 3z - 6y, \dot{y} = 6x - 5z, \dot{z} = 5y - 3x$

3. $\dot{x} = 3z - 2y, \dot{y} = 2x - 5z, \dot{z} = 5y - 3x$

4. $\dot{x} = 3z - 2y, \dot{y} = 2x + 5z, \dot{z} = -5y - 3x$

5. $\dot{x} = -5z - 2y, \dot{y} = 2x + 3z, \dot{z} = -3y + 5x$