Vzorová písomka 2

2-EFM-107 Parciálne diferenciálne rovnice, 2022

Každý príklad má hodnotu 4 body.

Príklad 1. Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ktoré pre $x \in \mathbb{R}$ spĺňa podmienku $u(x,0) = \max(0, 1 - x^2)$. Pre každý čas $t > 0$ nájdite hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx$.

Príklad 2. Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ktoré pre $x \in \mathbb{R}$ spĺňa podmienku $u(x,0) = \max(0, 1 - x^2)$. Pre každý čas $t > 0$ nájdite hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx$.

Príklad 3. Nájdite riešenie $u(x,t)$ rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 t, \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ktoré pre $x \in \mathbb{R}$ spĺňa podmienku $u(x,0) = e^x$.

Príklad 4. Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ktoré pre $x \in \mathbb{R}$ spĺňa podmienku $u(x,0) = \operatorname{arctg}(x)$. Dokážte, že v každom čase $t > 0$ je $u(x,t)$ rastúcou funkciou premennej x.

Príklad 5. Rozhodnite, či je nasledovné tvrdenie pravdivé. Ak áno, dokážte ho. Ak nie, nájdite konkrétny kontrapríklad.

Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ktoré pre $x \in \mathbb{R}$ spĺňa podmienku $u(x,0) = 0$. Pre každý čas $t > 0$ platí, že celkové množstvo tepla v tomto čase je kladné, t.j. $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx > 0$. Potom dodávané teplo $f(x,t)$ je v každom čase $t > 0$ a každom bode $x \in \mathbb{R}$ kladné.