Domáca úloha 7

2-EFM-107 Parciálne diferenciálne rovnice, 2023

Termín odovzdania: 30. 11. 2023 na začiatku cvičenia

V príkladoch 1 a 2 riešte to zadanie, ktoré je napísané pri vašom mene v Google tabuľke. V príklade 3 odovzdajte maximálne 3 zadania, do hodnotenia sa počítajú 2 najlepšie (každé má hodnotu 10 bodov)

Vo všetkých príkladoch sa rovnica rieši pre $x \in (-\infty, \infty), t > 0$.

Príklad 1 (10 b.): Nájdite riešenie $u = u(x,t)$ rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t) \ (x \in \mathbb{R}, t > 0),$$

ktoré spĺňa podmienku $u(x,0) = 0$, ak:

1. $f(x,t) = -2e^{2x}$ a $k = 3$
2. $f(x,t) = 2e^{-3x}$ a $k = -3$
3. $f(x,t) = -3e^{4x}$ a $k = 5$

Príklad 2 (10 b.): Nech $u = u(x,t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-t}\max(0, 1-|x|),\ x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ktoré spĺňa podmienku:

1. $u(x,0) = e^{-2x^2}$
2. $u(x,0) = e^{-3x^2}$
3. $u(x,0) = e^{-4x^2}$

Nájdite hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx$ pre každý čas $t > 0$.

Príklad 3 (2 × 10 b.), príklady na výber:

1. Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3u = 0, \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ktoré pre $x \in \mathbb{R}$ spĺňa podmienku $u(x,0) = \max(0, 1 - x^2)$. Pre každý čas $t > 0$ nájdite hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx$.

2. Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ktoré pre $x \in \mathbb{R}$ spĺňa podmienku $u(x,0) = \operatorname{arctg}(x)$. Dokážte, že v každom čase $t > 0$ je $u(x,t)$ rastúcou funkciou premennej x.

3. Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ktoré pre $x \in \mathbb{R}$ spĺňa podmienku $u(x,0) = |\sin(x)|$. Dokážte, že riešenie nemá tvar. $u(x,t) = \alpha(t)|\sin(x)|$. *Návod: Treba využiť vlastnosť riešenia RVT z prednášky.*

4. Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ktoré pre $x \in \mathbb{R}$ spĺňa podmienku $u(x,0) = |\sin(x)|$. Dokážte, že v každom čase $t > 0$ je $u(x,t)$ párnou funkciou premennej x, teda $u(-x,t) = u(x,t)$.

5. Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ktoré pre $x \in \mathbb{R}$ spĺňa podmienku $u(x,0) = |\sin(x)|$. Dokážte, že v každom čase $t > 0$ je $u(x,t)$ periodickou funkciou premennej x s periódou π, teda $u(x+\pi,t) = u(x,t)$.

6. *Rozhodnite, či je nasledovné tvrdenie pravdivé. Ak áno, dokážte ho. Ak nie, nájdite konkrétny kontrapríklad.*

   Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ktoré pre $x \in \mathbb{R}$ spĺňa podmienku $u(x,0) = 0$. Pre každý čas $t > 0$ platí, že celkové množstvo tepla v tomto čase je kladné, t.j. $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx > 0$. Potom dodávané teplo $f(x,t)$ je v každom čase $t > 0$ a každom bode $x \in \mathbb{R}$ kladné.