Vzorová písomka 2

- Každý príklad má hodnotu 3 body.
- Všetky tvrdenia (okrem vzorcov pre výpočet riešení), ktoré používate, treba dokázať. Vrátane tých, ktoré sme odvodili na cvičení. Píšte pritom aj všetky medzikroky.

Príklad 1. Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ktoré pre $x \in \mathbb{R}$ spĺňa podmienku $u(x,0) = e^{-x^2}$. Pre každý čas $t > 0$ nájdite hodnotu integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx$.

Príklad 2. Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\frac{\partial u}{\partial x} + Bu = 0, \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ktoré pre $x \in \mathbb{R}$ spĺňa podmienku $u(x,0) = e^{-|x|}$, kde A, B sú parametre. Pre každý čas $t > 0$ definujme

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx.$$

Odvoďte všetky hodnoty parametrov A, B, pre ktoré je funkcia $F(t)$ klesajúca.

Príklad 3. Nájdite riešenie $u(x,t)$ rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{x+t}, \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ktoré pre $x \in \mathbb{R}$ spĺňa podmienku $u(x,0) = \sin(x)$.

Príklad 4. Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(|\sin(t)| + \frac{1}{2}\right) x^9, \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ktoré pre $x \in \mathbb{R}$ spĺňa podmienku $u(x,0) = 0$. Dokážte, že v každom čase $t > 0$ je $u(x,t)$ rastúcou funkciou premennej x.

Príklad 5. Rozhodnite, či je nasledovné tvrdenie pravdivé. Ak áno, dokážte ho. Ak nie, nájdite konkrétny kontrapríklad.

Nech $u(x,t)$ je riešenie rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad \text{pre } x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

ktoré pre $x \in \mathbb{R}$ spĺňa podmienku $u(x,0) = 0$. Platí, že celkové množstvo tepla, t.j. $\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx > 0$, je rastúcou funkciou času a funkcia $f(x,t)$ je spojitá. Potom dodávané teplo $f(x,t)$ je v každom čase $t > 0$ a každom bode $x \in \mathbb{R}$ kladné.