

CVIČENIA Z PDR 2005/2006

DOMÁCA ÚLOHA 5

TERMÍN ODOVZDANIA: 27.10.2005

*Za správne riešenie ľubovoľného príkladu je 1 bod. Odovzdať môžete aj viac príkladov, maximálne však môžete získať jeden bod.*

1. Je daná rovnica

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + x^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

- (a) Nájdite všeobecné riešenie rovnice (1).
- (b) Nájdite také riešenie, ktoré spĺňa  $z(0, y) = y^3$ .
- (c) Nájdite také riešenie, ktoré spĺňa  $z(x, 2x) = x$ .

2. Nájdite riešenie rovnice

$$(1 + x^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$z(0, y) = y^2 \quad (3)$$

a spravte skúšku (t.j. ukážte, že nájdené riešenie spĺňa rovnicu (2) a podmienku (3)).

3. **Zákon zachovania hmoty**

Uvažujme jednorozmerný prípad zákona zachovania hmoty, t.j. rovnicu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

kde neznáma funkcia  $\rho(t, x)$  vyjadruje hustotu hmoty v bode  $x$  v čase  $t$ .

Predpokladajme teraz, že rýchlosť  $v$  je konštantná (t.j. nezávisí od polohy častice hmoty ani od času). Rovnica (4) sa potom dá napísať takto:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

Ďalej je zadané začiatočné rozdelenie hmoty, t.j.  $\rho(0, x) = \rho_0(x)$ .

- (a) Nájdite riešenie v závislosti od konštanty  $v$  a funkcie  $\rho_0$ .
- (b) Nájdite riešenie pre  $v = 1$  a začiatočnú podmienku  $\rho_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$ . Nakreslite graf riešenia v časoch  $t = 0$ ,  $t = 1$ ,  $t = 2$ ,  $t = 3$ .
- (c) To isté zopakujte pre  $v = 2$  (a rovnakú funkciu  $\rho_0$ ). Ako sa zmenia grafy?