

1 Black-Scholesov vzorec

Odvodenie PDR pre cenu opcie a jej riešenia je v skriptách [2].

Cena európskej call opcie v Black-Scholesovom modeli je

$$V = S\Phi(d_1) - Ee^{-rT}\Phi(d_2), \quad (1)$$

$$d_1 = \frac{(r + \frac{1}{2}\sigma^2)T + \ln \frac{S}{E}}{\sqrt{\sigma^2 T}}, \quad d_2 = \frac{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \ln \frac{S}{E}}{\sqrt{\sigma^2 T}},$$

kde

- Φ je distribučná funkcia normalizovaného normálneho rozdelenia $N(0,1)$. V MATLABe dostaneme hodnotu $\Phi(x)$ príkazom `normcdf(x,0,1)`.
- S je aktuálna cena akcie.
- E je strike price opcie.
- T je čas zostávajúci do expirácie opcie v rokoch. Pritom sa uvažujú len dni, počas ktorých je burza otvorená. Vynechávajú sa teda víkendy a sviatky (pozri <http://biz.yahoo.com/opt/calendar.html>).
- r je úroková miera (ako desatinné číslo, nie v percentách).
- σ je volatilita ceny akcie. Z predpokladov Black-Scholesovho modelu vyplýva, že logaritmy

$$u_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} \quad (2)$$

sú nezávislé a majú normálne rozdelenie. Ak je dĺžka časového intervalu medzi S_{t-1} a S_t rovná Δt (znovu v rokoch), tak variancia u_t je $\sigma^2 \Delta t$. Z hodnôt S_1, S_2, \dots, S_N teda najskôr vypočítame u_2, \dots, u_N . Odhadneme ich varianciu:

$$\widehat{\text{Var}} u = \frac{1}{N-2} \sum_{t=2}^N (u_t - \bar{u})^2,$$

kde $\bar{u} = \frac{1}{N-1} \sum_{t=2}^N u_t$. Odhad parametra σ^2 potom bude

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\widehat{\text{Var}} u}{\Delta t}.$$

Ešte treba rozhodnúť, koľko hodnôt S_t zobrať na výpočet volatility akcie. Čím viac hodnôt použijeme, tým presnejší odhad by sme mali dostať. Na druhej strane, volatilita akcie napríklad pred rokom nemusí byť rovnaká ako terazšia volatilita. V knihe [1] sa odporúča pri denných dátach cien akcií použiť posledných 90 až 180 hodnôt.

2 Porovnanie s reálnymi cenami opcii - príklad

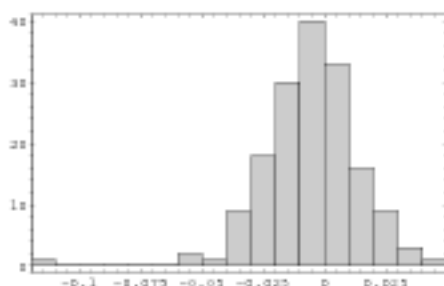
Budeme sa zaoberať opciami na akcie Google. Ceny akcie a opcii sú z konca dňa 21.11.2005. Cena akcie $S = 409,36$, opcie so splatnosťou v decembri (na konci dňa 16.12.2005) majú takéto ceny:

strike price	390	400	410	420	430
cena opcie	26,30	19,80	14,20	10,00	6,60

Tabuľka 1: Ceny opcii

Na odhad volatility akcie sme použili ceny od apríla 2005, spolu 164 hodnôt. Histogram hodnôt u_t , definovaných vzťahom (2) je na obr. 1. Odhad variancie u_t vyšiel 0,0003816. Dĺžka časového intervalu medzi dvoma hodnotami je jeden deň. Ak uvažujeme rok s 250 obchodnými dňami, Δt je $1/250$. Preto odhad parametra σ^2 je

$$\hat{\sigma}^2 = 0,0003816 \times 250 = 0,0954.$$



Obr. 1: Histogram hodnôt u_t

Úrokovú mieru zoberieme rovnú 0,0379, čo je výnos trojmesačných US Treasury Bills (pozri <http://bonds.yahoo.com/rates.html>).

Do expirácie opcie zostáva 18 obchodných dní, čiže $T = 18/250 = 0,072$.

Dosadením týchto hodnôt do vzorca (1) dostaneme ceny opcii dané modelom. Výsledky a porovnanie so skutočnými cenami je v tabuľke 2.

strike price	390	400	410	420	430
skutočná cena opcie	26,30	19,80	14,20	10,00	6,60
cena opcie podľa B&S modelu	25,84	19,23	13,76	9,46	6,24

Tabuľka 2: Skutočné ceny opcii a ceny vypočítané pomocou B&S modelu

3 Zadanie úlohy

Zvoľte si firmu a pre call opcie na jej akcie porovnajte reálne ceny s cenami podľa Black-Scholesovho modelu.

Úloha by mala obsahovať:

- Názov firmy a stručnú informáciu o tom, v akej oblasti pôsobí.
- Deň, z ktorého sú používané ceny akcií a opcií. Cena akcie v tento deň a opcie, s ktorými ďalej pracujete: expirácia, čas zostávajúci do expirácie, strike price a cena.
- Odhad volatility akcie - z akých dát ste ju počítali, výsledok.
- Použitú úrokovú mieru.
- Výpočet cien opcií podľa B&S modelu a ich porovnanie so skutočnými cenami.

Ďalšie informácie:

- Každý musí analyzovať opcie inej firmy. Keď si vyberiete firmu, pošlite mi mail¹. Na stránke² budem priebežne aktualizovať zoznam firiem, ktoré si už niekto vybral.
- Vyberajte si známe a veľké firmy, pri ktorých sa dá predpokladať, že s opciami na ich akcie sa obchoduje v dosť veľkom množstve. Opcie vyberajte také, ktorých strike price je blízko aktuálnej cene akcie.
- Dáta a informácie o firme nájdete na <http://finance.yahoo.com>. Popis, kde sa na tejto stránke dajú nájsť ceny akcií a opcií, je na <http://pc2.ian.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/finance-yahoo.html>.
- Môžete skúmať opcie s rovnakou expiráciou a rôznymi strike price, opcie s rovnakou strike price a rôznymi expiráciami, vplyv voľby rôzneho obdobia pri odhade volatility, atď.
- Vypracovanú úlohu, spolu so súborom s výpočtami a dátami na odhad volatility, pošlite mailom na adresu bs.projekty@gmail.com. Termín odovzdania je 9.12.2005 (týždeň pred koncom semestra).
- Maximálne môžete získať 5 bodov.

¹stehlikova@pc2.ian.fmph.uniba.sk

²<http://pc2.ian.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/pdf>

Literatúra

- [1] Hull, J.: Options, Futures and Other Derivative Securities. Prentice Hall, 1993.
- [2] Ševčovič, D.: Parciálne diferenciálne rovnice. Skriptá..