

Riešený príklad.

Na cvičení sme (pomocou algoritmu) našli inverznú maticu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Skúsme zistiť ako vyzerá inverzná matica pre maticu tohto typu (každý prvok 1 okrem opačnej diagonály, kde je -2), avšak všeobecného rozmeru $n \times n$. Pozrime sa najskôr na prípad $n = 2, 3$. Pre $n = 2$ ľahko zistíme, že

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pre $n = 3$ dokonca zistíme, že takáto matica je singulárna (a teda nie je invertovateľná), lebo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zatiaľ len vidíme, že ak inverzná matica existuje, bude symetrická a pravdepodobne bude mať všade okrem opačnej diagonály rovnaké prvky. Ako však nájdeme všeobecný predpis?

Pozrime sa na alternatívny spôsob, ako nájsť inverznú maticu k našej pôvodnej 4×4 matici

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Pokúsme sa najskôr nájsť prvý stĺpec inverznej matice. Tento stĺpec musí byť "kolmý na druhý, tretí a štvrtý riadok matice. Vieme rýchlo nájsť vektor s touto vlastnosťou? Všimneme si, že prvé tri zložky v týchto riadkoch v súčte dávajú 0. Vektor kolmý na tieto riadky bude teda $(1, 1, 1, 0)^T$ (a každý jeho skalárny násobok). Potrebujeme však zabezpečiť, aby skalárny súčin s prvým riadkom bol 1. To dosiahneme, keď vektor prenásobíme hodnotou $\frac{1}{3}$. Naozaj platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Podobnou úvahou zistíme, že

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

a napokon dospejeme k inverznej matici, ako sme uviedli na začiatku.

Pokúsime sa túto techniku použiť na maticu všeobecného rozmeru. Začneme najskôr rozmerom 5×5 . Pozrime sa na maticu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Skúsime rýchlo nájsť vektor kolmý na druhý až piaty riadok našej matice. Keďže súčet prvých štyroch zložiek je vždy 1, vektor s touto vlastnosťou bude $(1, 1, 1, 1, -1)$ (a každý jeho násobok). Potrebujeme však opäť zabezpečiť, aby skalárny súčin s prvým riadkom bol 1. To dosiahneme, keď vektor prenásobíme hodnotou $\frac{1}{6}$. Naozaj platí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Našli sme teda prvý stĺpec inverznej matice. Keď túto úvahu použijeme na ostatné stĺpce, získame tvar inverznej matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Skúsme teraz postup zopakovať pre maticu všeobecného rozmeru $n \times n$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \cdots & 1 & -2 \\ 1 & 1 & \cdots & -2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -2 & \cdots & 1 & 1 \\ -2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Najskôr nájdeme vektor kolmý na druhý až n -tý riadok. Keďže súčet prvých $n-1$ zložiek je vždy $n-4$, vektor s touto vlastnosťou bude $(1, 1, \dots, 1, 4-n)$ (a každý jeho násobok). Potrebujeme však opäť zabezpečiť, aby skalárny súčin s prvým riadkom bol 1. To dosiahneme, keď vektor prenásobíme hodnotou

$$\frac{1}{(n-1) - 2(4-n)} = \frac{1}{3n-9}.$$

Inverzná matica teda bude

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & -2 \\ 1 & 1 & \cdots & -2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -2 & \cdots & 1 & 1 \\ -2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3n-9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 4-n \\ 1 & 1 & \cdots & 4-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 4-n & \cdots & 1 & 1 \\ 4-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tento predpis platí pre všetky rozmery $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$.

Bonusová úloha: Vedeli by ste nájsť predpis pre podobnú maticu $n \times n$, v ktorej číslo -2 nahradíme všeobecným k ?