Cvičenie 1: Úvod do LP

1. (zdroj: [1]) Načrtnite množinu prípustných riešení

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y \geq 6, 2x + y \leq 6, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

   a) Ktoré body sú vrcholmi množiny $\mathcal{P}$?
   b) Načrtnite vrstevnice účelovej funkcie $f(x, y) = x + y$, t.j. priamky $x + y = c$ pre rôzne hodnoty c. Aká je minimálna/maximálna hodnota funkcie f na $\mathcal{P}$?
   c) Ktorý bod minimalizuje/maximalizuje funkcie $g(x, y) = 3x + y$, $h(x, y) = x - y$ na $\mathcal{P}$?
   d) Sformulujte (napíšte) príslušné úlohy LP.

2. (zdroj: [1]) Ukážte algebraicky aj geometricky, že

$$\mathcal{P} = \{x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 5y \leq 3, 3x - 8y \geq 5, x \geq 0, y \geq 0\} = \emptyset.$$

3. (zdroj: [1]) Ukážte, že nasledujúca úloha je neohraničená (úloha má prípustné riešenie ale nemá optimálne riešenie):

$$\begin{array}{ll} \max & x + y \\ & -3x + 2y \leq -1, \\ & x - y \leq 2, \\ & x \geq 0, y \geq 0. \end{array}$$

4. (zdroj: [1]) Pridajte jedno ohraničenie k nerovnostiam $x \geq 0, y \geq 0$ tak aby množina $\mathcal{P}$ daná týmito troma vzťahmi bola:
   a) jednobodová; b) prázdna; c) viacbodová, ohraničená; d) neohraničená.

5. (zdroj: [2]) Množina prípustných riešení $\mathcal{P}$ je daná vzťahmi

$$\begin{array}{c} 2x_1 + x_2 \geq 2, \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$

   Množinu graficky znázornite.
   a) Je táto množina ohraničená? Nájdite jej vrcholy.
   b) Nájdite minimum a maximum funkcie $f(x) = x_1 - x_2$ na $\mathcal{P}$.
   c) Ako sa zmení množina $\mathcal{P}$, ak z jej popisu vynecháme nerovnosť $x_1 + x_2 \leq 4$? Ako sa zmení riešenie z časti b) ? Aké bude minumum funkcie $g(x) = 2x_1 - x_2$?
   d) Nájdite také účelové funkcie, pre ktoré nebude množina optimálnych riešení minimalizačnej/ maximalizačnej úlohy na $\mathcal{P}$ jednobodová.

6. (zdroj: [2]) Graficky riešte úlohu

$$\begin{array}{ll} \max & 45x_1 + 30x_2 \\ & 22x_1 + 10x_2 \leq 60, \\ & 6x_1 + 6x_2 \leq 60, \\ & 10x_1 + 5x_2 \leq 85, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{array}$$

7. Daná je úloha LP s parametrom $a > 0$:

$$\begin{array}{ll} \min & ax_1 + x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 60, \\ & 2x_1 + x_2 \geq 5, \\ & x_2 \geq 0. \end{array}$$

   a) Graficky riešte pre $a = 1$.
   b) Nájdite optimálne riešenie v závislosti od parametra a.