

Cvičenie 3: Formulácia a zápis úloh lineárneho programovania, transformácie úloh

Budeme uvažovať 3 základné tvary úloh LP:

$$\begin{array}{lll} \min & c^T x & \min & c^T x & \min & c^T x \\ & Ax = b & & Ax \geq b & & Ax \geq b \\ & x \geq 0 & & x \geq 0 & & \\ & (LP1), & & (LP2), & & (LP3). \end{array}$$

Úlohu tvaru (LP1) nazývame štandardným tvarom úlohu LP.

- Naformulujte úlohu (LP1) v tvare (LP2) a (LP3).
 - Naformulujte úlohu (LP2) v tvare (LP1) a (LP3).
 - Naformulujte úlohu (LP3) v tvare (LP2) a (LP1).
- Nasledujúce úlohy preformulujte do tvarov (LP1), (LP2), (LP3) a zapíšte v kompaktnom maticovom tvare.

$$\begin{array}{ll} a) \min & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ & 2 \leq x_1 + x_2 \leq 3, \\ & 4 \leq x_1 + x_3 \leq 5, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}, \quad \begin{array}{ll} b) \min & x_1 + x_2 + x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ & x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 1. \end{array}$$

- Konvertujte úlohu do štandardného tvaru a graficky vyriešte.

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 4x_2 + x_3 \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ & x_1 - x_3 = 1, \\ & x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array}$$

Hint: Eliminujte premennú x_1 .

- Transformujte nasledujúcu úlohu na úlohu LP v štandardnom tvare:

$$\begin{array}{ll} \min & |x_1| + |x_2| + |x_3| \\ & x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_1 + x_3 = 3. \end{array}$$

- Transformujte úlohy minimalizácie funkcií

$$\|Cx - d\|_1, \|Cx - d\|_\infty,$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $d \in \mathbb{R}^m$, do tvaru LP. Upravte na tvar (LP3), t.j. nájdite tvar a rozmer matice A a vektorov b, c .

- Daná je funkcia $f(x) = \frac{u^T x}{v^T x}$, s definičným oborom $\mathcal{D} = \{x \mid v^T x > 0\}$. Transformujte úlohu

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

do tvaru úlohy LP.

- Transformujte nasledujúce úlohy do tvaru LP, upravte na niektorý zo základných tvarov:

$$\begin{array}{ll} a) & \min & c^T x \\ & & \|x\|_\infty \leq 1 \\ b) & \min & \max\{x_1, \dots, x_n\} \\ & & Ax \leq b \\ c) & \min & |c^T x + d| \\ & & Ax \leq b \\ d) & \max & c^T x \\ & & \|x\|_1 \leq 1 \\ e) & \min & \|Ax - b\|_1 \\ & & \|x\|_\infty \leq 1 \\ f) & \min & \|x\|_1 \\ & & \|Ax - b\|_\infty \leq 1 \\ g) & \min & \|Ax - b\|_1 + \|x\|_\infty \\ h) & \min & \|Ax - b\|_\infty + \|x\|_1 \end{array}$$