Cvičenie 4: Riešenie špeciálnych úloh LP

1. Uvažujme úlohu LP s dvoma premennými a účelovou funkciou $f(x_1, x_2) = ax_1 - x_2$, kde $a \in \mathbb{R}$ je parameter. V závislosti od parametra a graficky nájdite optimálne riešenie minimalizačnej úlohy pre množinu prípustných riešení
   a) $\mathcal{P} = \{x \mid \|x\|_1 \le 1\}$ b) $\mathcal{P} = \{x \mid \|x\|_\infty \le 1\}$

2. Nech A je reálna $m \times n$ matica, $c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$. Daná je úloha
$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax = b. \end{array}$$
   a) Za akých predpokladov je úloha prípustná?
   b) Zdôvodnite rozklad $c = c_1 + c_2$, kde $Ac_1 = 0, c_1^T c_2 = 0$.
   Predpokladajme, že úloha je prípustná.
   c) Ukážte, že ak $c_1 = 0$, tak všetky prípustné riešenia sú optimálne a nájdite optimálnu hodnotu.
   d) Ukážte, že ak $c_1 \neq 0$, tak je úloha neohraničená. (Hint: skonštruujte vhodnú polpriamku).

3. Nech $0 \neq a, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$. Daná je úloha
$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & a^T x \le b. \end{array}$$
   Zrejme takáto úloha je vždy prípustná.
   b) Zdôvodnite rozklad $c = c_1 + \alpha a$, kde $a^T c_1 = 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
   c) Ukážte, že ak $\alpha > 0$, tak je úloha neohraničená. (Hint: skonštruujte vhodnú polpriamku).
   d) Ukážte, že ak $c_1 \neq 0$, tak je úloha neohraničená. (Hint: skonštruujte vhodnú polpriamku).
   e) Za akých predpokladov má úloha riešenie? Čo je optimálna hodnota a kde sa nadobúda?

4. Nech $c, l, u \in \mathbb{R}^n, l \le u$. Daná je úloha
$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & l \le x \le u. \end{array}$$
   Nájdite optimálnu hodnotu a optimálne riešenie. (Hint: Účelová funkcia aj ohraničenia sú separovateľné, minimalizovať možno postupne cez jednotlivé premenné.)

5. Daná je úloha
$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \le b, \end{array}$$
   kde A je regulárna štvorcová $n \times n$ matica. Analyzujtie optimálne riešenie úlohy. (Hint: Využite transformáciu premenných $y = Ax$.