Cvičenie 5: Základy konvexnej analýzy množín

1. Nech C, D sú dve konvexné množiny v $\mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Dokážte, že
   a) $\alpha C = \{\alpha x \mid x \in C\}$ je konvexná;
   b) prienik $C \cap D$ je konvexná;
   c) Minkowského súčet $C + D = \{x + y \mid x \in C, y \in D\}$ je konvexná.

2. Nech $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexná množina a $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineárne zobrazenie. Ukážte, že
$$\alpha(C) = \{\alpha(x) \mid x \in C\} \subseteq \mathbb{R}^m$$
je konvexná množina.

3. Daný je systém konvexných množín C_α, kde $\alpha \in \mathcal{A}$. Dokážte, že
$$\cap_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha$$
je konvexná množina.

4. Nech C je konvexná množina a $x_1, \ldots, x_k \in C$. Dokážte, že pre ľubovoľné $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ také, že
$$\lambda_i \geq 0,\ \forall i,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$
platí
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in C.$$

5. Daná je konvexná funkcia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, t.j. funkcia s vlastnosťou
$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \forall \lambda \in [0, 1] : \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$
Dokážte, že tzv. epigraf funkcie f, t.j. množina
$$\mathrm{epi}(f) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq t\},$$
je konvexná množina.

6. Nech $\|.\|$ je ľubovoľná norma v $\mathbb{R}^n$, $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ a $r > 0$. Ukážte, že množina
$$\mathcal{B}_{\|.\|}(\hat{x}, r) = \{x \mid \|\hat{x} - x\| \leq r\}$$
je konvexná množina.

7. Nech A je afínna množina a $x_1, \ldots, x_k \in A$. Dokážte, že pre ľubovoľné $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ také, že
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$
platí
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in A.$$

8. Ukážte (s využitím definície afínnej množiny), že množina
$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 3, x_3 + x_4 = -2\}$$
je afínnou množinou. Vyjadrite ju v tvare $\mathcal{A} = x_0 + V$, t.j. nájdite x_0 a vektorový podpriestor V.

9. Ukážte, že množina
$$C_{\|.\|} = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid \|x\| \leq t\},$$
kde $\|.\|$ je ľubovoľná vektorová norma v $\mathbb{R}^{n-1}$, je konvexný kužeľ.

10. Nech $\mathcal{S}_+^n$ označuje možinu všetkých symetrických kladne semidefinitných matíc rozmeru $n \times n$. Ukážte, že $\mathcal{S}_+^n$ je konvexný kužeľ v priestore symetrických $n \times n$ matíc $\mathcal{S}^n$.

11. Nech $\mathcal{C}$ je konvexný kužeľ a $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{A}$. Dokážte, že pre ľubovoľné $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ platí

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in \mathcal{C}.$$

12. Dokážte, že relatívne vnútro relint$C$ konvexnej množiny C je konvexná množina.

13. Daná je množina

$$C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, z = 1\}.$$

Nájdite množiny aff$C$, conv$C$, cone$C$.

14. (*) Nech C_1, C_2 sú neprázdne konvexné množniny.
a) Dokážte, že

$$\mathrm{relint} C_1 \cap \mathrm{relint} C_2 \subseteq \mathrm{relint}(C_1 \cap C_2),\ \mathrm{cl} C_1 \cap \mathrm{cl} C_2 \subseteq \mathrm{cl}(C_1 \cap C_2).$$

b) Ukážte, že ak relint$C_1 \cap$ relint$C_2 \neq \emptyset$, tak

$$\mathrm{relint} C_1 \cap \mathrm{relint} C_2 = \mathrm{relint}(C_1 \cap C_2),\ \mathrm{cl} C_1 \cap \mathrm{cl} C_2 = \mathrm{cl}(C_1 \cap C_2).$$

c) Ukážte na príklade, že predpoklad relint$C_1 \cap$ relint$C_2 \neq \emptyset$ v časti b) je nevyhnutný.

15. (*) Nech C_1, C_2 sú neprázdne konvexné množniny.
a) Dokážte, že

$$\mathrm{relint} C_1 + \mathrm{relint} C_2 \subseteq \mathrm{relint}(C_1 + C_2),\ \mathrm{cl} C_1 + \mathrm{cl} C_2 + \mathrm{cl}(C_1 \cap C_2).$$

b) Ukážte, že ak aspoň jedna z množín C_1, C_2 je ohraničená, tak

$$\mathrm{cl} C_1 + \mathrm{cl} C_2 = \mathrm{cl}(C_1 + C_2).$$

c) Ukážte na príklade, že predpoklad ohraničenosti v časti b) je nevyhnutný.