Cvičenie 6: Vety o separovaní a Farkasova lema, krajné body.

1. a) Obrátená veta o opornej nadrovine. Nech C je uzavretá množina s neprázdnym vnútorm a má opornú nadrovinu v každom hraničnom bode. Potom C je konvexná. Dokážte.
   b) Nájdite nekonvexnú množinu, pre ktorú platí, že každým jej krajným bodom prechádza nejaká jej oporná nadrovina.

2. Nech C, D sú dve disjunktné množiny v $\mathbb{R}^n$. Uvažujme množinu
$$K = \{(v, \gamma) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid v^T x \leq \gamma, \ \forall x \in C, \ v^T y \geq \gamma, \ \forall y \in D\}.$$
   Ukážte, že K je konvexný kužeľ.

3. Nech C je konvexná a uzavretá množina. Ak oporná nadrovina $\mathcal{H}$ množiny C obsahuje jediný krajný bod x, tak $C \cap \mathcal{H} = \{x\}$. Dokážte.

4. Ak niektorým hraničným bodom x konvexnej množiny C prechádzajú dve oporné nadroviny, tak existuje nekonečne veľa oporných nadrovín obsahujúcich bod x. Dokážte.

5. Nech C je neprázdna, konvexná a uzavretá množina. Potom C má aspoň jeden krajný bod práve vtedy, keď neobsahuje žiadnu priamku. Dokážte.

6. Dané sú body
$$x_0 = [4, 2], \ x_1 = [8, 1], \ x_2 = [11, 1], \ x_3 = [10, 6], \ x_4 = [7, 9], \ x_5 = [4, 6].$$
   Nájdite separujúcu nadrovinu, ktorá oddeľuje bod x_0 od konvexného polyédra $\mathcal{P} = \mathrm{conv}\{x_1, .., x_5\}$.

7. Nech C je neprázdna, konvexná množina a platí $C \cap \mathbb{R}^n_{++} = \emptyset$, kde
$$\mathbb{R}^n_{++} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0, i = 1, .., n\}.$$
   Ukážte, že pre tie tieto dve množiny existuje separujúca nadrovina $\mathcal{H}$ daná vektorom $v \geq 0$ (t.j. s nezápornými zložkami).

8. S využitím Farkasovej lemy dokážte, že $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ platí práve jedna z alternatív:

   I $\exists x \geq 0: \ Ax \leq b$

   II $\exists y \geq 0: \ A^T y \geq 0, b^T y < 0.$

   Vyjadrite tvrdenie ako ekvivalenciu.

9. (*) a) Ukážte nasledujúcu ekvivalenciu:
$$[\forall x : Ax = b \ \Rightarrow \ c^T x = d] \ \Leftrightarrow \ [\exists y : A^T y = c \ \wedge \ b^T y = d].$$
   b) Pomocou a) ukážte, že platí práve jedna z alternatív:

   I $\exists x > 0: \ Ax = b$

   II $\exists y: \ A^T y \geq 0, A^T y \neq 0, b^T y \leq 0.$

   Vyjadrite tvrdenie ako ekvivalenciu.