Cvičenie 7: Teória duality lineárneho programovania.

1. Nájdite duálnu úlohu k úlohe

$$\begin{array}{ll} \min & -x_1 - x_2 \\ & -3x_1 + 2x_2 \le -1, \\ & x_1 - x_2 \le 2, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{array}$$

   Je duálna úloha prípustná?

2. Nájdite duálnu úlohu k úlohe

$$\begin{array}{ll} \max & 45x_1 + 30x_2 \\ & 22x_1 + 10x_2 \le 60, \\ & 6x_1 + 6x_2 \le 60, \\ & 10x_1 + 5x_2 \le 85, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{array}$$

3. Nájdite duálnu úlohu k úlohám bez toho aby ste ich transformovali do štandardného tvaru.

$$a)\ \begin{array}{ll} \min & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ & 2 \le x_1 + x_2 \le 3, \\ & 4 \le x_1 + x_3 \le 5, \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{ll} \min & x_1 + x_2 + x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ & x_1 \ge 1, x_3 \ge 1, \end{array}$$

$$c)\ \begin{array}{ll} \min & x_1 + 4x_2 + x_3 \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ & x_1 - x_3 = 1, \\ & x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, \end{array} \qquad d)\ \begin{array}{ll} \max & 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ & 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 \le 3 = 1, \\ & 8x_1 - 4x_2 + x_4 \ge 1, \\ & x_2 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{array}$$

4. Daná je primárno duálna dvojica všeobecných úloh LP

$$\begin{array}{ll} \min & (c^1)^T x^1 + (c^2)^T x^2 \\ & A_{11}x^1 + A_{12}x^2 \ge b^1, \\ & A_{21}x^1 + A_{22}x^2 = b^2, \\ & x^1 \ge 0, \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & (b^1)^T y^1 + (b^2)^T y^2 \\ & A_{11}^T y^1 + A_{21}^T y^2 \le c^1, \\ & A_{12}^T y^1 + A_{22}^T y^2 = c^2, \\ & y^1 \ge 0. \end{array}$$

   Pre túto dvojicu priamo dokážte Slabú vetu o dualite.

5. Dokážte Farkasovu lemu skonštruovaním špeciálnej úlohy LP a využitím teórie duality.

6. S využitím duality v LP dokážte, že $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$ platí práve jedna z alternatív:

   I $\exists x \ge 0:\ Ax \le b$

   II $\exists y \ge 0:\ A^T y \ge 0, b^T y < 0.$

7. Nájdite duálnu úlohu k úlohe

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & b \le Ax \le d, \\ & l \le x \le u. \end{array}$$

8. Nájdite duálne úlohy k LP formuláciám úloh minimalizácie

$$\|Cx - d\|_1,\ \|Cx - d\|_\infty.$$

9. Daná je množina bodov $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$. Chceme zistiť, ži bod a_0 je konvexnou kombináciou bodov $a_1, \dots, a_m$.
   a) Naformulujte tento problém ako úlohu LP.
   b) Odvoďte duálnu úlohu k tejto úlohe.

10. Nech $\bar{x} \ge 0$ je riešenie sústavy $Ax = b$, pričom $A = A^T$. Dokážte, že $\bar{x}$ je optimálne riešenie úlohy

$$\begin{array}{ll} \max & b^T x \\ & Ax \le b. \end{array}$$

11. Daná je úloha

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T x \\ & Ax \leq 0. \end{aligned}$$

Ukážte, že buď $\bar{x} = 0$ je jej optimálne riešenie, alebo úloha nemá optimálne riešenie. Dajte do súvislosti s Farkasovou lemou.

12. Pomocou teórie duality zdôvodnite, že ak má úloha

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ & A^T y \leq c, \end{aligned}$$

optimálne riešenie, tak má optimálne riešenie aj úloha

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ & A^T y \leq c', \end{aligned}$$

kde $c' \geq c$.

13. Daná je úloha

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax \geq b. \end{aligned}$$

Dokážte, že množina všetkých vektorov b, pre ktoré má daná úloha optimálne riešenie, je konvexná.

14. Zistite, či vektor $x = (2, 11/2, 1/2)^T$ je optimálne riešenie úlohy

$$\begin{aligned} \min \quad & 15x_1 + 5x_2 + 20x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 12, \\ & 3x_1 + x_2 + 5x_3 \geq 14, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

15. Zistite, či vektor $x = (4, 1)^T$ je optimálne riešenie úlohy (bez toho aby ste úlohu graficky riešili).

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - x_2 \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ & x_1 + x_2 \leq 5, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

16. Vektor $x = (5, 1, 0)^T$ je optimálne riešenie úlohy

$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 8x_2 + 6x_3 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12, \\ & x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 8, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Nájdite optimálne riešenie primárnej úlohy.

17. Nech $0 \neq a, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$. Daná je úloha

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & a^T x \leq b. \end{aligned}$$

Nájdite k nej duálnu úlohu a analyzujte riešiteľnosť. Porovnajte s Príkladom 3 z Cvičenia 4.

18. Nech $c, l, u \in \mathbb{R}^n, l \leq u$. Daná je úloha

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & l \leq x \leq u. \end{aligned}$$

Nájdite k nej duálnu úlohu a analyzujte riešiteľnosť. Porovnajte s Príkladom 4 z Cvičenia 4.

19. Daná je úloha LP

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax \leq b, \end{aligned}$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & -10 & -1 \\ -6 & -11 & -2 & 12 \\ 1 & 6 & -1 & -3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -8 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 47 \\ 93 \\ 17 \\ -93 \end{pmatrix}.$$

Ukážte, že $x^* = (1, 1, 1, 1)^T$ je jediné riešenie tejto úlohy.