Cvičenie 9: Simplexová metóda.

1. Daná je simplexová tabuľka:

x_1	x_2	w_1	w_2	b
-1	1	1	0	1
2	3	0	1	5
1	6	0	0	0

a) Napíšte maximalizačnú úlohu LP, ktorá vedie na túto tabuľku.
b) Použitím pravidla najväčšieho koeficientu pre výber stĺpcového indexu prejdite k nasledujúcej simplexovej tabuľke a napíšte príslušné bázické riešenie.

2. Riešte simplexovou metódou. Množinu prípustných riešení graficky znázornite a vyznačte jednotlivé bázické riešenia pre každú iteráciu.

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_2 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \qquad [x^* = (6,2)] \end{array}$$

3. Riešte simplexovou metódou bez tabuľkového zápisu.

$$\begin{array}{ll} \max & 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 10 \qquad [x^* = (0, 9/4, 0)] \\ & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{array}$$

Je toto riešenie jediné?

4. Riešte simplexovou metódou.
a)

$$\begin{array}{ll} \max & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 + x_3 \leq 5 \qquad [x^* = (5/2, 3/2, 0)] \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ll} \max & 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 5 \qquad [x^* = (1, 2, 0, 0)] \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 6x_4 \\ & -x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 0 \\ & 3x_1 - x_2 + 2x_4 \leq 16 \qquad [\text{neohraničenosť}] \\ & -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{array}$$

5. Riešte dvojfázovou simplexovou metódou. Pokiaľ existuje viac riešení, nájdite ich.

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -2x_1 - 3x_2 \leq -3 \qquad [x^* = (6,2)] \\ & 4x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{array}$$

6. Riešte dvojfázovou simplexovou metódou.
a)

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 - 5x_2 - x_3 \leq -2 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 7 \qquad [x^* = (29/13, 11/13, 0)] \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{array}$$

b)

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 - x_2 + 3x_3 \\ & x_1 - 4x_2 + 2x_3 \leq -1 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{aligned} \qquad [x^* = (17/11, 7/11, 0)]$$

c)

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + x_2 \\ & 2x_1 - x_3 \leq -2 \\ & -x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq -1 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{aligned} \qquad [\text{neohraničenosť}]$$

7. Preveďte na maximalizačnú úlohu v požadovanom tvare a riešte dvojfázovou simplexovou metódou.
a)

$$\begin{aligned} \min \quad & 14x_1 + x_2 + 6x_3 + 5x_4 \\ & 2x_1 + x_3 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \geq 16 \\ & 2x_1 + x_3 + x_4 \geq 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{aligned} \qquad [x^* = (0, 2, 4, 5)]$$

b)

$$\begin{aligned} \min \quad & 8x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 13x_4 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 \geq 16 \\ & 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 \geq 16 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0, \end{aligned} \qquad [x^* = (5, 0, 0, 2)]$$

8. Riešte úlohy z predchádzajúceho cvičenia duálnou simplexovou metódou.

9. a) Riešte simplexovou metódou.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_3 \\ & 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

b) Nájdite všetky bázické optimálne riešenia.
c) Nájdite všetky optimálne riešenia.

10. Vyriešte simplexovou metódou

$$\begin{aligned} \max \quad & 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 9x_4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

11. Uvažujte úlohu LP v tvare

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax \leq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Predpokladajme, že neplatí $b \geq 0$ ale existuje j také, že $b_j > 0$. Vytvorme novú úlohu, v ktorej ku všetkým nerovniciam, kde $b_i < 0$ pripočítame dostatočne veľký násobok j-tej nerovnice.
a) Ukážte na príklade, že optimálne riešenie pre novú úlohu nemusí byť optimálnym riešením pre pôvodnú úlohu.
b) Ukážte, že ak optimálne rie senie novej úlohy je prípustné riešenie pre pôvodnú úlohu, tak je aj optimálne riešenie pôvodnej úlohy.