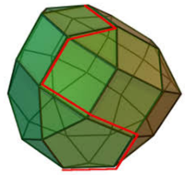
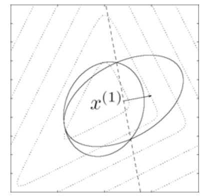
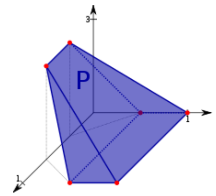
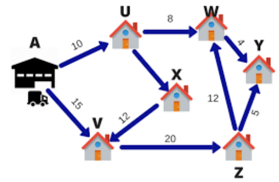
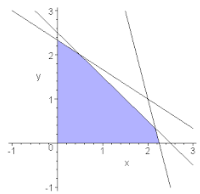
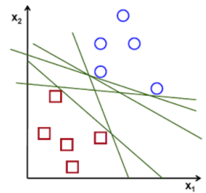
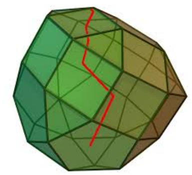
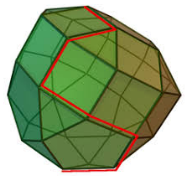




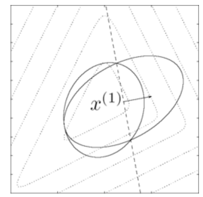



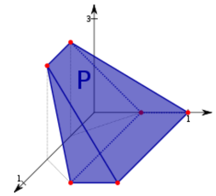





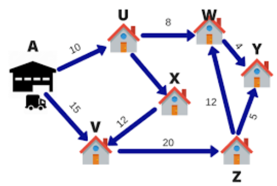
Lineárne programovanie
zimný semester 2019/20

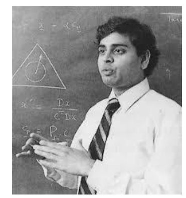
M. Trnovská, KAMŠ, FMFI UK

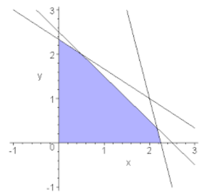


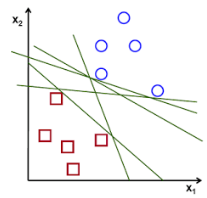


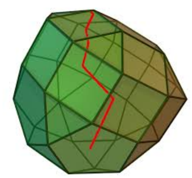












Úvod do lineárneho programovania (1)

Úloha lineárneho programovania

Nájsť minimum alebo maximum **lineárnej funkcie** na **konvexnej polyedrickej množine**, t.j. množine, ktorá je popísaná pomocou systému lineárnych rovníc a nerovníc.

Tri prístupy k úlohám LP:

- intuitívny - geometrický;
- výpočtový (simplexová metóda, metódy vnútorného bodu);
- algebraický - teória duality.

Lineárne programovanie v kontexte matematickej optimalizácie

Úloha matematického programovania:

$$\begin{array}{ll} \min(\max) & f(x) \\ & x \in K, \end{array}$$

- Ak $K = \mathbb{R}^n$ (otvorená množina) - voľná optimalizácia;
- Ak K je uzavretá, popísaná funkčnými vzťahmi - úlohy s ohraničeniami

nekonvexné úlohy (globálna optimalizácia);
konvexné programovanie;
lineárne porgramovanie.

Geometrický prístup

Množina prípustných riešení

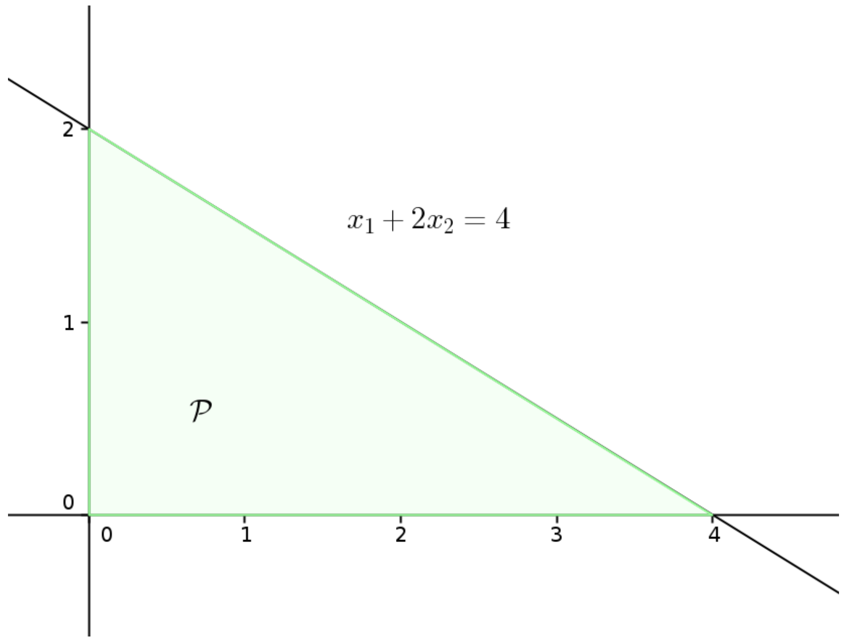
$\mathbb{R}^2$ - množina prípustných riešení je popísaná ako prienik priamok a polrovín - vzťahy typu:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b,\ a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$$

$\mathbb{R}^n$ - množina prípustných riešení je popísaná ako prienik nadrovín a polpriestorov - vzťahy typu:

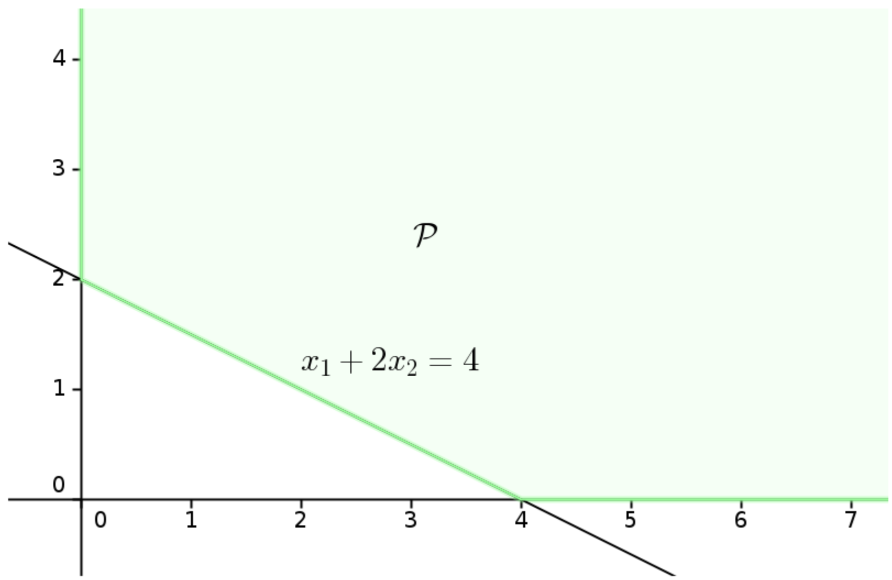
$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b,\ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \leq b$$

Množina prípustných riešení



$$\mathcal{P} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 \leq 4,\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

Množina prípustných riešení



$$\mathcal{P} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 2x_2 \geq 4,\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

Účelová funkcia

$$f(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n.$$

Úloha lineárneho programovania: nájsť bod $x^* \in \mathcal{P}$ ktorý minimalizuje/maximalizuje funkciu f na množine $\mathcal{P}$, t.j.

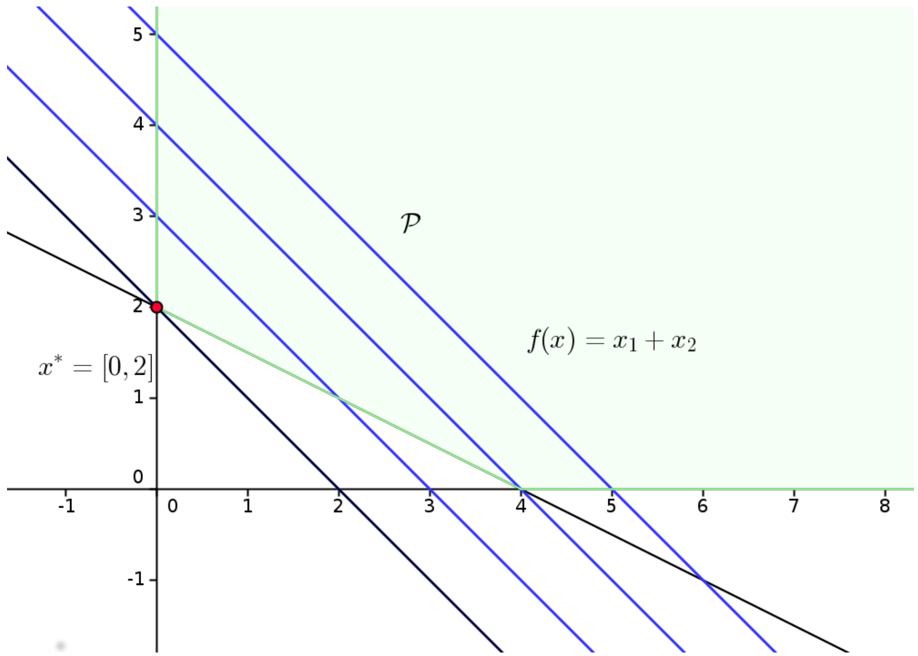
- minimalizácia: nájsť $x^* \in \mathcal{P}$:

$$f(x^*) \leq f(x) \; \forall x \in \mathcal{P}$$

- maximalizácia: nájsť $x^* \in \mathcal{P}$:

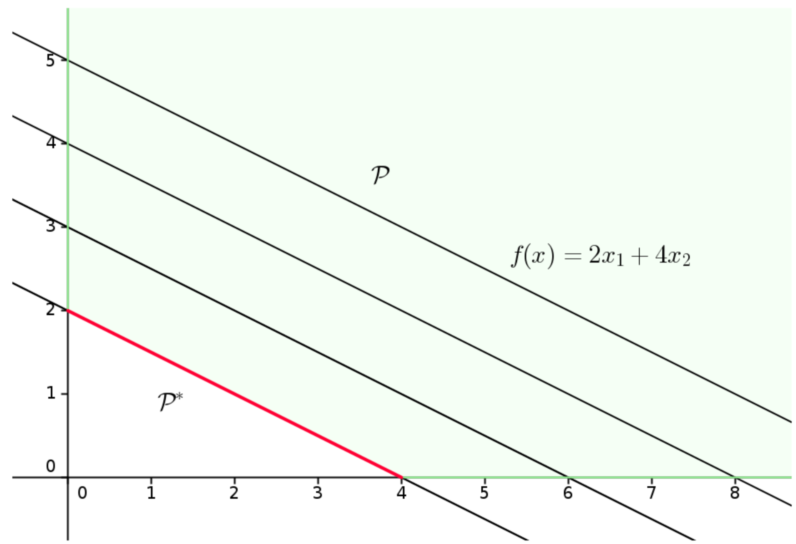
$$f(x^*) \geq f(x) \; \forall x \in \mathcal{P}$$

Úloha lineárneho programovania:



$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Úloha lineárneho programovania:



$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 + 4x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Neohraničená úloha lineárneho programovania

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

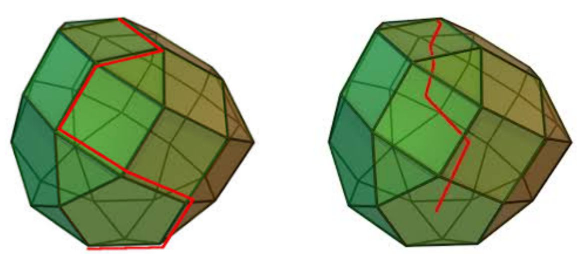
Neprípustná úloha lineárneho programovania

$$\begin{aligned} \min\ (\max) \quad & x_1 + x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 \leq 0, x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Základné fakty o lineárnom programovaní

• Ak existuje optimálne riešenie úlohy LP, tak sa vždy **nadobudne v nejakom vrchole** množiny prípustných riešení. Množina optimálnych riešení môže byť jednobodová alebo viac ($= \infty$) bodová (napr. hrana alebo stena polyedrickej množiny $\mathcal{P}$).

• **Simplexová metóda** prehľadáva vrcholy množiný $\mathcal{P}$. V **metódach vnútorného bodu** sa konštruuje postupnosť bodov vo vnútri množiny $\mathcal{P}$ konvergujúca k optimálnemu riešeniu.



- **Každá úloha LP má práve jednu z vlastností:**

- Množina $\mathcal{P}$ je prázdna - úloha je neprípustná.

- Množina $\mathcal{P}$ je neprázdna, účelová funkcia f je neohraničená na $\mathcal{P}$.

- Množina $\mathcal{P}$ je neprázdna, účelová funkcia f nadobúda na $\mathcal{P}$ svoje minimum alebo maximum.

- Štandardne sa budeme zaoberať **minimalizačnými úlohami.**

Minimalizačnú úlohu LP budeme nazývať **primárna úloha.** Ku každej minimalizačnej úlohe LP existuje **maximalizačná úloha** ktorá v istom zmysle dáva dolné ohraničenie na riešenie primárnej úlohy. Túto maximalizačnú úlohu voláme **duálna úloha.** Vzťah medzi primárnou a duálnou úlohou skúma **teória duality.**

Aplikácie lineárneho progrmovania

Klasické aplikácie lineárneho programovania

- boli motiváciou pre vznik LP
- Dopravný problém
- Úloha plánovania výroby
- Problém výživy

Aplikácie lineárneho progrmovania

Moderné aplikácie lineárneho programovania

- optimalizácia portfólia
- optimalizácia úrovne ekonomickej aktivity
- strojové učenie - binárna klasifikácia dát, l_1 SVM
- niektoré úlohy optimálneho riadenia
- l_1, l_∞ lineárna regresia
- obálková analýza dát
- rekonštrukcia signálu (spracovanie obrazu)
- niektoré úlohy experimentálneho dizajnu