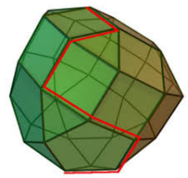
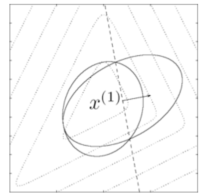
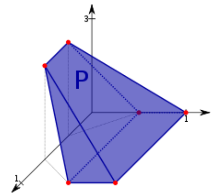
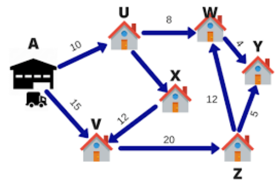
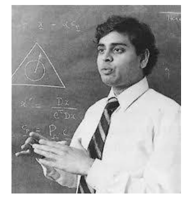
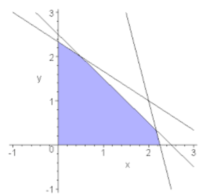


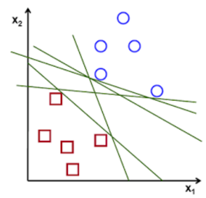


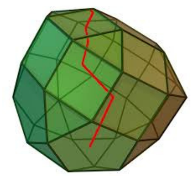






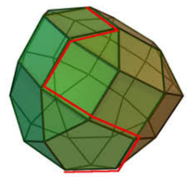


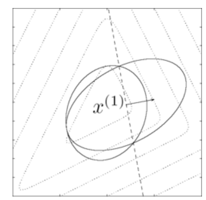


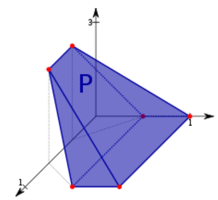


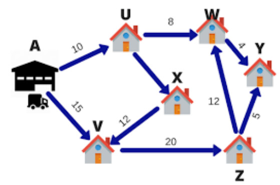
Lineárne programovanie zimný semester 2019/20

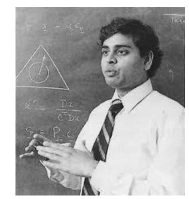
M. Trnovská, KAMŠ, FMFI UK

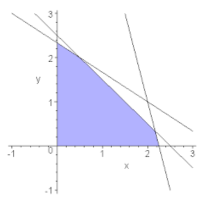


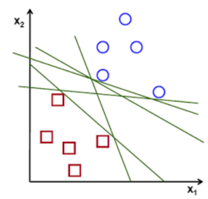


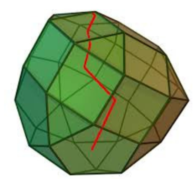












Úvod do lineárneho programovania (2)

Klasické aplikácie lineárneho programovania

Dopravný problém

Úloha plánovania výroby

Problém výživy

Dopravný problém

Texas, Kalifornia a Aljaška vyprodukovali 1 milión barelov ropy. Do Chicaga treba dopraviť 800 000 barelov a do Bostonu 2 200 000 barelov. Transport 1 barelu ropy stojí jednu jednotku peňazí za každú míľu. Približné vzdialenosti v míľach sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

	Texas	Kalifornia	Aljaška
Chicago	1000	2000	3000
Boston	1500	3000	3700

Úloha je minimalizovať náklady na transport tak, aby boli splnené podmienky úlohy.

Dopravný problém

Premenné úlohy:

$$x_{TC}, x_{KC}, x_{AC}, x_{TB}, x_{KB}, x_{AB},$$

Formulácia úlohy:

$$\min \quad 1000x_{TC} + 2000x_{KC} + 3000x_{AC} + 1500x_{TB} + 3000x_{KB} + 3700x_{AB},$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{TC} & + & x_{KC} & + & x_{AC} & & & & & & & = & 800.000 \\
 & & & & & & x_{TB} & + & x_{KB} & + & x_{AB} & = & 2.200.000 \\
x_{TC} & & & & & + & x_{TB} & & & & & = & 1.000.000 \\
 & & x_{KC} & & & & & + & x_{KB} & & & = & 1.000.000 \\
 & & & & x_{AC} & & & & & + & x_{AB} & = & 1.000.000
\end{array}$$

$$x_{TC}, x_{KC}, x_{AC}, x_{TB}, x_{KB}, x_{AB} \geq 0.$$

Dopravný problém

Abstraktná formulácia:

- Tovar sa vyrába v m výrobných strediskách.
- Za jednotku času vyrobí i -te výrobné stredisko $a_i > 0$ jednotiek tovaru, $i = 1, \dots, m$.
- Tovar sa dopravuje do n odbytových stredísk.
- j-te odbytové stredisko požaduje za jednotku času $b_j > 0$ jednotiek tovaru, $j = 1, \dots, n$.

Platí

$$a_1 + \cdots + a_m = b_1 + \cdots + b_n,$$

Dopravný problém

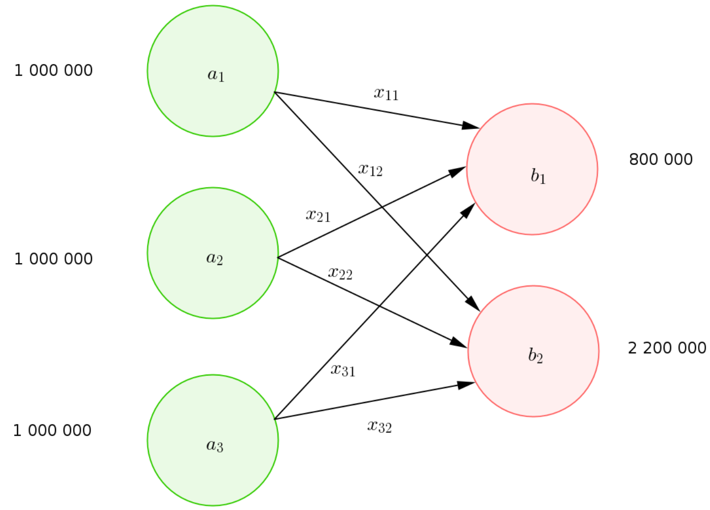
Premenné úlohy: x_{ij} - množstvo tovaru, ktoré sa dopraví z i-teho výrobného strediska do j-toho odbytového strediska. Premenné musia spĺňať:

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Dopravný problém



Za dopravu z i-teho výrobného strediska do j-teho odbytového strediska je daná sadzba c_{ij}.

Účelová funkcia:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}.$$

Dopravný problém

Príklad:

Budeme riešiť dopravný problém, kde $m = 2, n = 3$, kde

$$a_1 = 14, a_2 = 16, b_1 = 9, b_2 = 10, b_3 = 11$$

a matica dopravných sadzieb je

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Účelová funkcia úlohy teda bude

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} x_{ij} c_{ij} = 11x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + 5x_{21} + 4x_{22} + 7x_{23}.$$

Dopravný problém

Systém (2)-(3) má tvar

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & & & & & = & 14 \\
 & & & & & & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & = & 16 \\
x_{11} & & & & & + & x_{21} & & & & & = & 9 \\
 & & x_{12} & & & & & + & x_{22} & & & = & 10 \\
 & & & & x_{13} & & & & & + & x_{23} & = & 11
\end{array}
$$

Tento systém je závislý a preto môžeme vynechať napríklad prvú rovnicu.

Dopravný problém

Ak si označíme

$$x_{22} := x,\ x_{23} := y,$$

tak z druhej až piatej rovnice systému hneď dostaneme vyjadrenie

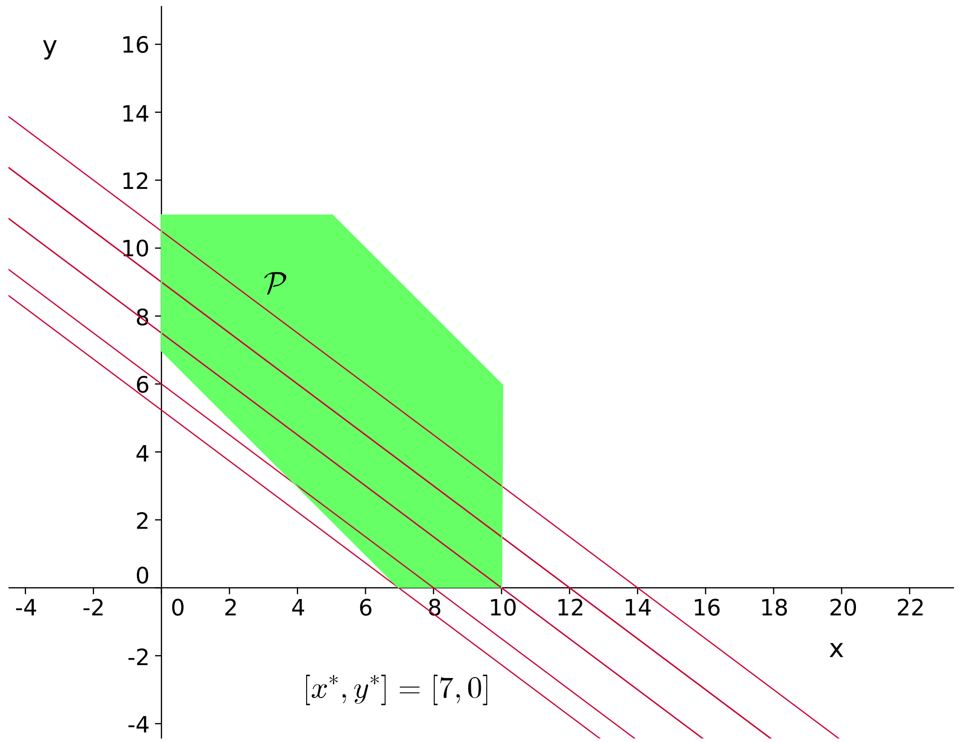
$$x_{21} = 16-x-y,\ x_{13} = 11-y,\ x_{12} = 10-x,\ x_{11} = 9-(16-x-y) = x+y-7.$$

Ak tieto vyjadrenia dosadíme do účelovej funkcie a podmeinok nezápornosti, dostaneme novú úlohu LP s dvoma premennými:

$$\begin{aligned} \min \quad & 98 + 6x + 8y \\ & x + y \le 16, \\ & x + y \ge 7, \\ & 0 \le x \le 10, \\ & 0 \le y \le 11. \end{aligned}$$

Dopravný problém

Grafické riešenie:



Dopravný problém

Minimálna hodnota účelovej funkcie $\tilde{f}(x, y) = 98 + 6x + 8y$ na množine

$$\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 16, x + y \geq 7, 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 11\}$$

sa nadobudne v bode $[x^*, y^*] = [7, 0]$.

Po dosadení dostávame optimálne hodnoty pôvodnej úlohy:

$$x_{11} = 0, x_{12} = 3, x_{13} = 11, x_{21} = 9, x_{22} = 7, x_{23} = 0.$$

Úloha plánovania výroby

Malý pivovar produkuje Ale (A) a Beer (B). Na ich výrobu treba kukuricu, chmel a slad, má však len obmedzené množstvo týchto surovín. Receptúry Ale a Beer vyžadujú rôzne množstvá surovín. Jednotlivé množstvá ako aj ceny sú uvedené v tabuľke:

	Kukurica (lbs)	Chmeľ(oz)	Slad (lbs)	Cena ($)
Ale (sud)	5	4	35	13
Beer (sud)	15	4	20	23
limit	480	160	1190	

Úloha plánovania výroby

Koľko by sme zarobili, ak by sme vyrábali len Ale?

Koľko by sme zarobili, ak by sme vyrábali len Beer ?

	Kukurica (lbs)	Chmeľ(oz)	Slad (lbs)	Cena ($)
Ale (sud)	5	4	35	13
Beer (sud)	15	4	20	23
limit	480	160	1190	

Úloha plánovania výroby

Úlohou je vyrobiť také množstvá, aby bol zisk maximálny. To vedie na úlohu LP:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 13A + 23B \\
& 5A + 15B \leq 480, \\
& 4A + 4B \leq 160, \\
& 35A + 20B \leq 1190, \\
& A, B \geq 0.
\end{aligned}
$$

	Kukurica (lbs)	Chmeľ(oz)	Slad (lbs)	Cena ($)
Ale (sud)	5	4	35	13
Beer (sud)	15	4	20	23
limit	480	160	1190	

Úloha plánovania výroby

Vyriešením zistíme, že 12 sudov Ale a 28 sudov Beer je optimálne množstvo. Obe hodnoty sú zrejme prípustné, lebo

$5 \times 12 + 15 \times 28 = 480, \; 4 \times 12 + 4 \times 28 = 160, \; 35 \times 12 + 20 \times 28 = 980.$

Zisk bude $13 \times 12 + 23 \times 28 = 800$.

	Kukurica (lbs)	Chmeľ(oz)	Slad (lbs)	Cena ($)
Ale (sud)	5	4	35	13
Beer (sud)	15	4	20	23
limit	480	160	1190	

Úloha plánovania výroby

Abstraktná formulácia:

- Výrobca môže vyrábať n rôznych výrobkov.
- Pri plánovaní výroby treba vziať do úvahy obmedzenú kapacitu m zdrojov.
- Kritérium optimality je maximalizácia zisku.

Označme pre $i \in \{1, \ldots, m\}$ a $j \in \{1, \ldots, n\}$

b_i	množstvo i-tej suroviny, ktorú máme k dispozícii,
a_{ij}	množstvo i-tej suroviny potrebnej na výrobu j-teho výrobku,
p_j	cenu jednotkového množstva j-teho výrobku,
x_j	množstvo j-teho výrobku,

Úloha plánovania výroby

LP formulácia:

$$\max \quad \Sigma_{j=1}^{n} p_j x_j$$

$$\Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \; i = 1, \ldots m,$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, n.$$

Problém výživy

Úlohou je zostaviť denný výživový plán, s čo najmenšími nákladmi, ktorý zabezpečí prísun aspoň 2000 kcal, 55 g proteínov a 800 mg vápnika. Zároveň však máme obmedzenia na počet denných porcií. K dispozícii máme isté druhy potravín:

	Veľkosť porcie	En. hod. (kcal)	Proteíny (g)	Vápnik (mg)	Cena 0.01$/por.	Limit por./deň
Cereálie	28 g	110	4	2	30	4
Hydina	100 g	205	32	12	240	3
Vajcia	2ks	160	13	54	130	2
Mlieko	237 ml	160	8	285	90	8
Koláče	170 g	420	4	22	200	2
Strukoviny	260 g	260	14	80	60	2

Problém výživy

Premenné úlohy x_i, $i = 1, \ldots, 6$ - počet porcii i-tej potraviny za deň.

Účelová funkcia predstavuje náklady:

$$f(x) = 30x_1 + 240x_2 + 130x_3 + 90x_4 + 200x_5 + 60x_6.$$

	Veľkosť porcie	En. hod. (kcal)	Proteíny (g)	Vápnik (mg)	Cena 0.01$/por.	Limit por./deň
Cereálie	28 g	110	4	2	30	4
Hydina	100 g	205	32	12	240	3
Vajcia	2ks	160	13	54	130	2
Mlieko	237 ml	160	8	285	90	8
Koláče	170 g	420	4	22	200	2
Strukoviny	260 g	260	14	80	60	2

Problém výživy

Ohraničenia garantujú dostatočný prísun kalórií, proteínov a vápnika:

$$
\begin{aligned}
&110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 \geq 2000, \\
&4x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 \geq 55, \\
&2x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 \geq 800,
\end{aligned}
$$

a taktiež sa berú do úvahy obmedzenia na denný počet porcii:

$$0 \leq x_1 \leq 4,\ 0 \leq x_2 \leq 3,\ 0 \leq x_3 \leq 2,\ 0 \leq x_4 \leq 8,\ 0 \leq x_5 \leq 2,\ 0 \leq x_6 \leq 2.$$

	Veľkosť porcie	En. hod. (kcal)	Proteíny (g)	Vápnik (mg)	Cena 0.01$/por.	Limit por./deň
Cereálie	28 g	110	4	2	30	4
Hydina	100 g	205	32	12	240	3
Vajcia	2ks	160	13	54	130	2
Mlieko	237 ml	160	8	285	90	8
Koláče	170 g	420	4	22	200	2
Strukoviny	260 g	260	14	80	60	2

Problém výživy

Motivácia: snaha armády zabezpečiť dostatočný prísun nutritientov, vitamínov,... pre vojakov s čo najmenšími nákladmi.

Problém výživy

Abstraktná formulácia: pre $i = 1, \ldots, m$ a $j = 1, \ldots, n$

a_{ij}	obsah nutritientu i v potravine j
c_j	cena porcie potraviny j
b_i	požadované množstvo nutritientu i za deň
d_j	denný limit na počet porcií potraviny j

premenné x_j - počet porcií potraviny j za deň

Formulácia úlohy LP:

$$\begin{array}{ll} \min & c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\ & \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i, \qquad i = 1, \ldots, m, \\ & 0 \leq x_j \leq d_j, \qquad\quad j = 1, \ldots n. \end{array}$$