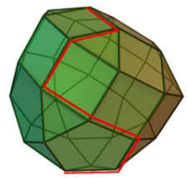
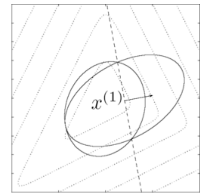
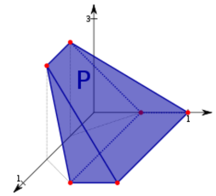
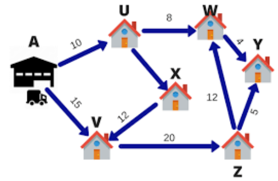
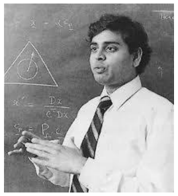
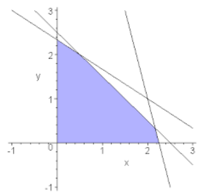
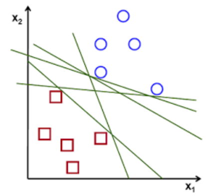
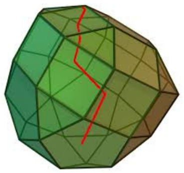
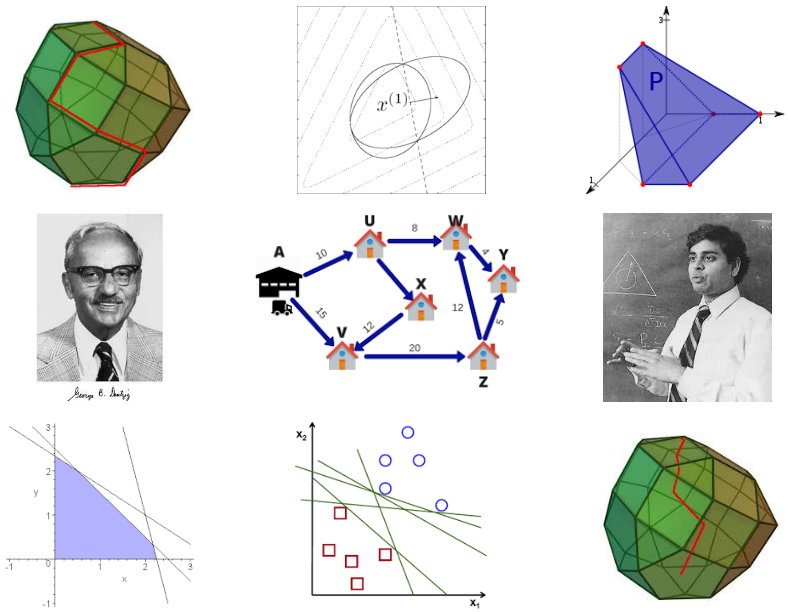




Lineárne programovanie zimný semester 2019/20

M. Trnovská, KAMŠ, FMFI UK



Úvod do lineárneho programovania (3)

Formulácie úloh lineárneho programovania a transformácie

Označme

$$I = \{1, \ldots, m\},\ J = \{1, \ldots, n\}.$$

Nech $I_1 \subseteq I$, $J_1 \subseteq J$ a nech $a_{ij}, b_i, c_j \in \mathbb{R},\ \forall i \in I, j \in J$ sú dané.

Úlohu

$$\begin{aligned}
\min \quad & \Sigma_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\
& \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ i \in I_1 \\
& \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i \in I \setminus I_1 \\
& x_j \geq 0, j \in J_1,
\end{aligned} \tag{1}$$

nazývame **minimalizačnou úlohou lineárneho programovania v zmiešanom tvare.**

Príklad.

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 + 2x_2 - x_3 \\ & 3x_1 - x_2 \geq 4, \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ & x_1 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{array}$$

Pre túto úlohu

$$J = \{1, 2, 3\}, J_1 = \{1, 3\}, I = \{1, 2\}, I_1 = \{1\}$$

a

$$(a_{11}, a_{12}, a_{13}) = (3, -1, 0), (a_{21}, a_{22}, a_{23}) = (2, 1, 1),$$

$$(c_1, c_2, c_3) = (1, 2, -1), (b_1, b_2) = (4, 1).$$

Úlohu LP (1), kde $I_1 = I$ a $J_1 = J$, t.j. úlohu

$$\begin{aligned} \min \quad & \Sigma_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\ & \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \; i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{2}$$

nazývame **minimalizačnou úlohou lineárneho programovania v tvare nerovností s nezápornými premennými.**

Úlohu LP (1), kde $I_1 = I$ a $J_1 = \emptyset$, t.j. úlohu

$$\begin{aligned} \min \quad & \Sigma_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\ & \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \ i = 1, \ldots, m \end{aligned} \qquad (3)$$

nazývame **minimalizačnou úlohou lineárneho programovania v tvare nerovností s voľnými premennými.**

Úlohu LP (1), kde $I_1 = \emptyset$ a $J_1 = J$, t.j. úlohu

$$\begin{aligned} \min \quad & \Sigma_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \\ & \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = 1, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{4}$$

nazývame **minimalizačnou úlohou lineárneho programovania v rovnicovom tvare.**

Pre nás: **úloha LP v štandardnom tvare.**

Maticový zápis úloh LP

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1^T- \\ \vdots \\ -a_m^T- \end{pmatrix}.$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ je (stĺpcový) vektor premenných

Maticový zápis úloh LP

Úlohu (2) možno zapísať ako

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x, \\ & Ax \geq b, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{5}$$

resp.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x, \\ & a_i^T x \geq b_i, i = 1, \ldots, m \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Maticový zápis úloh LP

Úlohu (3) možno zapísať ako

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x, \\ & Ax \geq b, \end{aligned} \tag{7}$$

resp.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x, \\ & a_i^T x \geq b_i, i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{8}$$

Maticový zápis úloh LP

Úlohu (4) možno zapísať ako

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x, \\ & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{9}$$

resp.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x, \\ & a_i^T x = b_i, i = 1, \ldots, m \\ & x \geq 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Maticový zápis úloh LP

Príklad.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ & 3x_1 - x_2 = 4, \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Každú úlohu lineárneho programovania možno previesť na **ľubovoľný** z tvarov:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x, \\ & Ax \geq b, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min \quad & c^T x, \\ & Ax \geq b, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min \quad & c^T x, \\ & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

- **Zmena maximalizačnej úlohy na minimalizačnú.** Platí

$$\max_{x \in M} f(x) = -\min_{x \in M}(-f(x)).$$

- **Otočenie nerovnosti v ohraničení**. Nerovnosť typu $a_i^T x \leq b_i$ je ekvivalentná $-a_i^T x \geq -b_i$.

- **Zmena ohraničena typu nerovností na ohraničenie typu rovností.** Ohraničenie typu

$$a_i^T x \leq b_i, \text{ resp. } a_i^T x \geq b_i$$

možno previesť na ohraničenie typu rovností zavedením nezáporných doplnkových premenných (slackov):

$$a_i^T x + s_i = b_i, \text{ resp. } a_i^T x - s_i = b_i, \ s_i \geq 0.$$

- **Zmena ohraničena typu rovností na ohraničenia typu nerovností.**

Ak máme dané ohraničenie typu

$$a_i^T x = b_i,$$

tak ho možno nahradiť dvoma ohraničeniami typu

$$a_i^T x \leq b_i, \; a_i^T x \geq b_i,$$

V prípade m ohraničení typu rovností takto získame $2m$ ohraničení.
Existujú efektívnejšie spôsoby ?

- **Nahradenie voľných premenných nezápornými premennými.**

Ak sa v úlohe vyskytuje voľná premenná x_j, možno ju zapísať v tvare

$$x_j = x_j^+ - x_j^-, \; x_j^+ \geq 0, \; x_j^- \geq 0.$$

Alternatívne možno voľnú premennú eliminovať jej vyjadrením pomocou jednej z rovností a dosadením do ostatných vzťahov.

Príklad.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6, \\ & x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Prevedieme na štandardný tvar....

Transformácie optimalizačných úloh

- **Rastúca transformácia účelovej funkcie.** Daná je optimalizačná úloha

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & x \in K \end{array} \tag{11}$$

a reálna funkcia ϕ. Ak ϕ je rastúca na množine $f(K)$, tak úloha (12) je ekvivalentná s

$$\begin{array}{ll} \min & \phi(f(x)) \\ & x \in K. \end{array}$$

V lineárnom programovaní je minimalizácia funkcie $f(x) = \alpha(c^T x) + \beta$, kde $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ ekvivalentná minimalizácii funkcie $c^T x$.

Transformácie optimalizačných úloh

- **Rregulárna transformácia premenných.** Daná je optimalizačná úloha

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & x \in K \end{array} \tag{12}$$

a regulárna matica R. Označme $y = Rx$. Úloha (12) je ekvivalentná s

$$\begin{array}{ll} \min & f(R^{-1}y) \\ & R^{-1}y \in K. \end{array}$$

Príklad: Analýza optimálneho riešenia úlohy

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \geq b \end{array}$$

kde A je $n \times n$ regulárna matica.

Transformácie optimalizačných úloh

- **Epigrafová transformácia.** Úloha (12) je ekvivalentná úlohe

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ & f(x) \le t, \\ & x \in K. \end{array}$$

- **Bodové maximum.** Nech $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $F(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$.

Potom sú ekvivalentné

$$\begin{array}{ll} \min & F(x) \\ & x \in K, \end{array} \quad \text{a} \quad \begin{array}{ll} \min & t \\ & f_i(x) \le t, i = 1, \ldots, m, \\ & x \in K. \end{array}$$

Príklad: $\min \ \|Ax - b\|_\infty$,

Transformácie optimalizačných úloh

- **Súčet absolútnych hodnôt.** Nech $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $F(x) = \Sigma_{i=1}^{m} |f_i(x)|$. Potom sú ekvivalentné

$$\begin{array}{ll} \min & F(x) \\ & x \in K \end{array} \quad \text{a} \quad \begin{array}{ll} \min & t_1 + \cdots + t_m, \\ & -t_i \le f_i(x) \le t_i, i = 1, \ldots, m, \\ & x \in K. \end{array}$$

Príklad: $\min \ \|Ax - b\|_1$,

- **Lineárne zlomkové programovanie.** Daná je funkcia

$$f(x) = \frac{c^T x + \gamma}{d^T x + \delta}, \quad \mathcal{D}(f) = \{x \mid d^T x + \delta > 0\}$$

Transformácie optimalizačných úloh

Uvažujme úlohu

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Označme

$$y = \frac{x}{d^T x + \delta}, \quad \mu = \frac{1}{d^T x + \delta}$$

Ekvivalentná LP úloha:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T y + \gamma\mu \\ & Ay = \mu b, \\ & d^T y + \delta\mu = 1. \\ & y \geq 0, \mu \geq 0. \end{array}$$