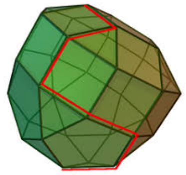
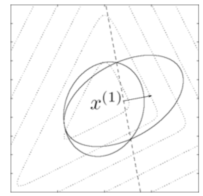
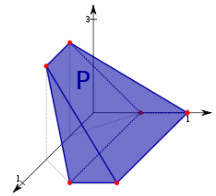
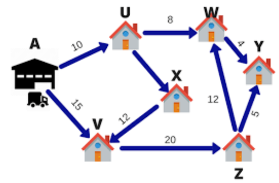
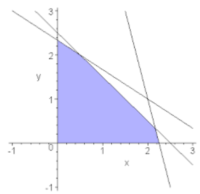
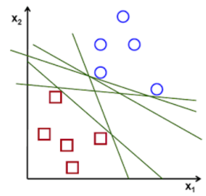


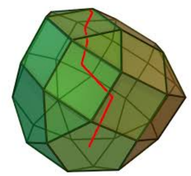






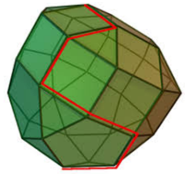
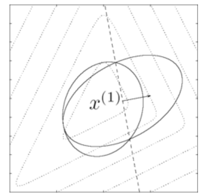
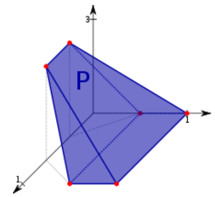


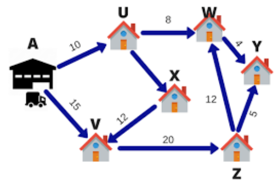


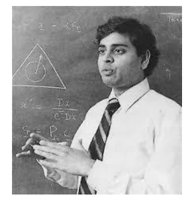
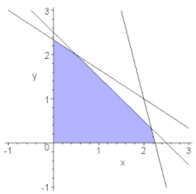
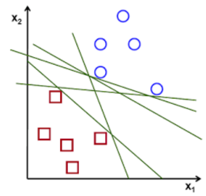
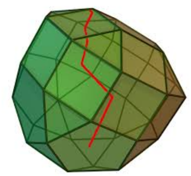


Lineárne programovanie
zimný semester 2019/20

M. Trnovská, KAMŠ, FMFI UK

Základy konvexnej analýzy množín

Prerekvizity

Budeme uvažovať euklidovský priestor $\mathbb{R}^n$ vektorov

$$x = (x_1, \ldots, x_n)^T$$

so skalárnym súčinom $x^T y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ a euklidovskou normou (dĺžkou) $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$. **Epsilon-okolím** bodu $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ budeme nazývať množinu

$$\mathcal{O}_\varepsilon(\hat{x}) = \{x \mid \|x - \hat{x}\|_2 < \varepsilon\}.$$

Je to (otvorená) euklidovská guľa so stredom v bode $\hat{x}$ a polomerom ε.

Prerekvizity

Bod $\hat{x} \in C$ nazývame **vnútorným bodom** množiny C, ak aj nejaké jeho epsilon-okolie patrí do množiny C.

Budeme hovoriť, že množnina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je **otvorená**, ak všetky jej body sú vnútorné.

Vnútrom množiny C budeme nazývať množinu všetkých jej vnútorných bodov a budeme ho označovať $\mathrm{int} C$.

Teda množina C je otvorená práve vtedy, keď $\mathrm{int} C = C$.

Prerekvizity

Budeme hovoriť, že množnina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je **uzavretá**, ak obsahuje všetky svoje limitné body. Teda ak pre ľubovoľnú konvergentnú postupnosť bodov $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq C$ platí

$$\lim_{i \to \infty} x_i = \bar{x} \;\Rightarrow\; \bar{x} \in C.$$

Uzáverom množiny C budeme nazývať množinu všetkých jej limitných bodov, a budeme ho označovať $\mathrm{cl}C$. Je to teda najmenšia uzavretá množina obsahujúca množinu C.

Množina C je uzavretá práve vtedy keď $\mathrm{cl}C = C$.

Hranicu množiny C, ozn. ∂C, definujeme ako $\partial C = \mathrm{cl}C - \mathrm{int}C$.

Prerekvizity

Množinu $C \subseteq \mathbb{R}^n$ budeme nazývať **kompaktnou**, ak pre každú postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq C$ existuje konvergentná podpostupnosť $\{x_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taká, že

$$\lim_{k \to \infty} x_{i_k} \in C.$$

Množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ sa nazýva ohraničená, ak existuje řeálne číslo $r > 0$ také, že

$$\|x\|_2 < r \ \forall x \in C$$

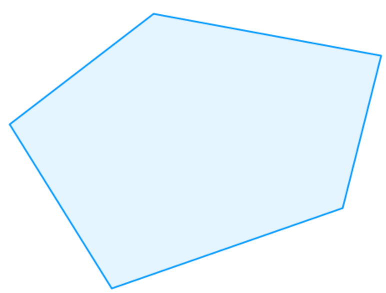
Veta: Množina $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktná práve vtedy, keď je uzavretá a ohraničená.

Konvexné množiny

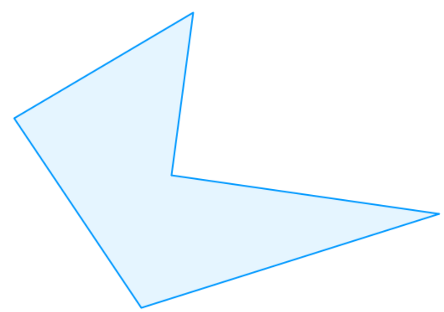
Definícia: Množina $C \in \mathbb{R}^n$ sa nazýva **konvexná**, ak pre ľubovoľné dva body $x_1, x_2 \in C$ a pre každé $\lambda \in [0, 1]$ platí

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in C.$$

Konvexná množina teda s každými dvoma bodmi obsahuje aj celú úsečku, ktorá ich spája.



Konvexná množina



Nekonvexná množina

Tvrdenie: Nech C, D sú dve konvexné množiny v $\mathbb{R}^n$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom
a) $\alpha C = \{\alpha x \mid x \in C\}$ je konvexná;
b) prienik $C \cap D$ je konvexná;
c) Minkowského súčet $C + D = \{x + y \mid x \in C, y \in D\}$ je konvexná.

Dôkaz: Cvičenie.

Tvrdenie: Daný je systém konvexných množín C_α, kde $\alpha \in \mathcal{A}$. Potom aj

$$\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} C_\alpha$$

je konvexná množina.

Dôkaz: Cvičenie.

Tvrdenie: Nech C je konvexná množina a $x_1, \ldots, x_k \in C$. Potom pre ľubovoľné $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ také, že

$$\lambda_i \geq 0,\ \forall i,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

platí

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in C.$$

Dôkaz: Cvičenie.

Tvrdenie: Nech C je konvexná množina. Potom $\mathrm{cl} C$ a $\mathrm{int} C$ sú konvexné množiny.

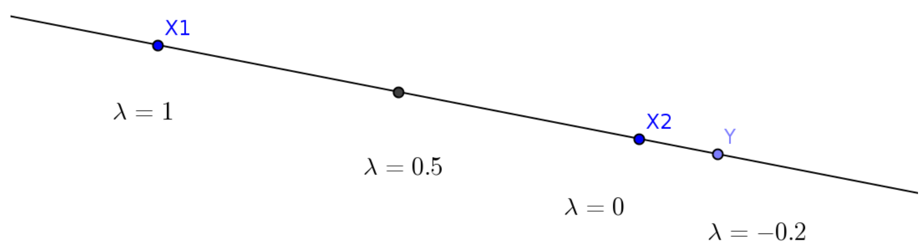
Dôkaz: ....

Priamky a úsečky

Nech $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ sú dva rôzne body. Potom body tvaru

$$y = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x_2 + \lambda(x_1 - x_2),$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$ tvoria priamku prechádzajúcu bodmi x_1, x_2. Hodnoty parametra $\lambda \in [0,1]$ zodpovedajú úsečke spájajúcej body x_1 a x_2.



Afinné množiny

Definícia: Množina $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ sa nazýva afinná, ak pre ľubovoľné dva body $x_1, x_2 \in C$ a pre každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in \mathcal{A}.$$

Afinná množina teda s každými dvoma bodmi obsahuje aj celú priamku, ktorá nimi prechádza.

Tvrdenie: Nech $\mathcal{A}$ je afinná množina a $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{A}$. Potom pre ľubovoľné $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ také, že $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ platí

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in \mathcal{A}.$$

Dôkaz: Cvičenie.

Súvislosť afinných množín a vektorových podpriestorov

Ak $\mathcal{A}$ je **afinná množina** a $x_0 \in \mathcal{A}$, tak množina

$$V = \mathcal{A} - x_0 = \{x - x_0 \mid x \in \mathcal{A}\}$$

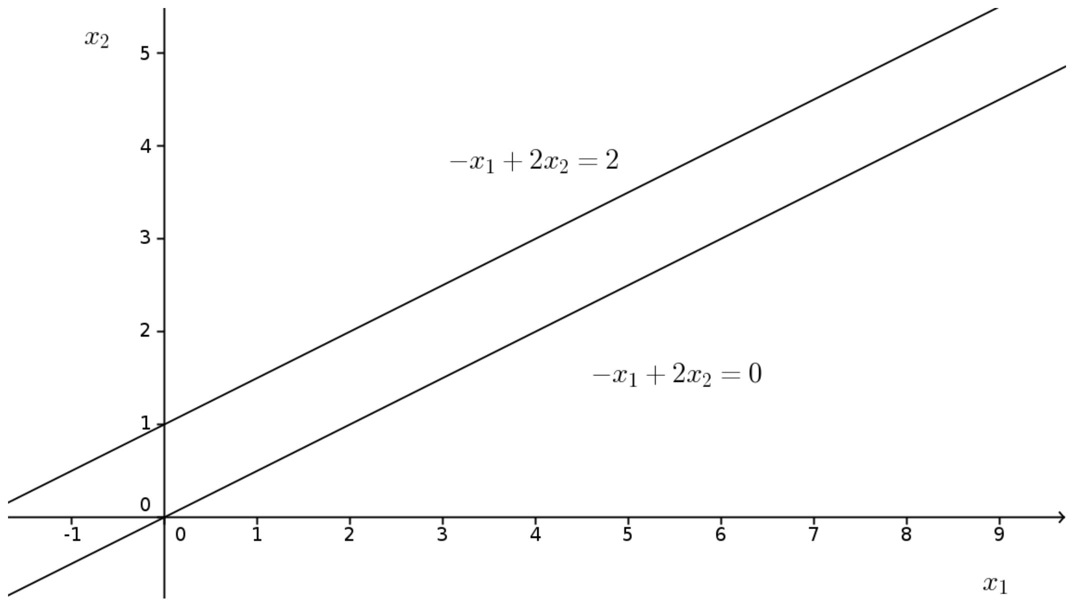
je **vektorovým podpriestorom.** Totiž ak $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $x, y \in \mathcal{A}$ sú ľubovoľné, tak

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - x_0) = \alpha x + \beta y + (1 - \alpha - \beta)x_0 - x_0 = z - x_0 \in V,$$

pretože

$$z = \alpha x + \beta y + (1 - \alpha - \beta)x_0 \in \mathcal{A}$$

Naopak, ak $V \subseteq \mathbb{R}^n$ je vektorový podpriestor a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je nejaký bod, tak zrejme $\mathcal{A} = V + x_0$ je afinná množina a $x_0 \in \mathcal{A}$.



Na obrázku vidno vektorový podpriesor V generovaný vektorom $(\frac{1}{2}, 1)^T$ reprezentovaný priamkou $x_1 - 2x_2 = 0$. Priamka $x_1 - 2x_2 = 2$ reprezentuje afínnu množinu $\mathcal{A}$, ktorú možno vyjadriť ako $\mathcal{A} = V + (0, 1)^T$.

Body $x_0, x_1, \ldots, x_k$ nazveme **afinne nezávislé**, ak sú vektory $x_0 - x_1, \ldots, x_0 - x_k$ **lineárne nezávislé**. Ekvivalentne by sme mohli vybrať ľubovoľný bod x_j a vektory $x_j - x_0, x_j - x_1, \ldots, x_{j-1} - x_j, x_{j+1} - x_j, x_k - x_j$ by boli lineárne nezávislé. Napríklad 3 body ležiace na jednej priamke nie sú afinne nezávislé, ale 3 body trojuholníka sú afinne nezávislé.

Body $x_0, x_1, \ldots, x_k$ sú **afinne nezávislé** práve vtedy keď

$$\forall\, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n : \sum_{i=0}^{k} \alpha_i x_i = 0, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0 \;\Rightarrow\; \alpha_i = 0,\ \forall i = 0, 1, 2, .., k$$

Dimenziou afinnéj množiny A budeme nazývať dimenziu príslušného vektorového podpriestoru V spĺňajúceho $\mathcal{A} = x_0 + V$.

Príklad:

Bod je afinný podpriestor dimenzie 0.

Priamka je afinný podpriestor dimenzie 1.

Nadrovina

$$\mathcal{H} = \{x \mid a^T x = \gamma\} \subseteq \mathbb{R}^n = x_0 + [a]^\perp,$$

kde x_0 spĺňa $a^T x_0 = \gamma$, je afinným podpriestorom dimenzie $n - 1$.

Polpriestory

Každá nadrovina $\mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}^n$ delí priestor $\mathbb{R}^n$ na dva (uzavreté) polpriestory

$$\mathcal{H}_- = \{x \mid a^T x \leq \gamma\},\ \mathcal{H}_+ = \{x \mid a^T x \geq \gamma\}.$$

Hranicou polpriestoru $\mathcal{H}_+$ je nadrovina $\mathcal{H} = \{x \mid a^T x = \gamma\}$ a jeho vnútro

$$\mathrm{int}\mathcal{H}_+ = \{x \mid a^T x > \gamma\},$$

nazývame otvoreným polpriestorom.

Oporná nadrovina konvexnej množiny

Definícia: Daná je konvexná množina C a bod $x_0 \in \partial C$. Opornou nadrovinou množiny C v bode x_0 budeme nazývať nadrovinu $\mathcal{H} = \{x \mid a^T x = \gamma\}$ spĺňajúcu

(i) $x_0 \in \mathcal{H}$;

(ii) $\forall x \in C: \; a^T x \leq (\geq) \gamma$, t.j. množina C leží v polpriestore $\mathcal{H}_-$ alebo $\mathcal{H}_+$, určenom nadrovinou $\mathcal{H}$.

Konvexné kužele

Definícia: Množina $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ sa nazýva **kužeľ** ak $\forall x \in \mathcal{C}$ a $\forall \alpha \geq 0$ platí $\alpha x \in \mathcal{C}$.

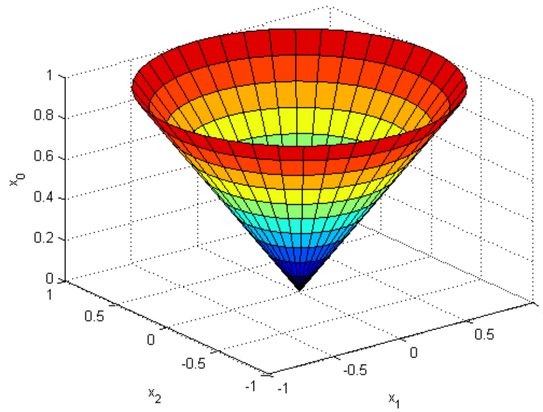
Definícia: Množina $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ sa nazýva **konvexný kužeľ**, ak pre ľubovoľné dva body $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$ a pre každé $\alpha, \beta \geq 0$ platí

$$\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{C}.$$

Tvrdenie: Nech $\mathcal{C}$ je konvexný kužeľ a $x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{C}$. Potom pre ľubovoľné $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$ platí

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in \mathcal{C}.$$

Dôkaz: Cvičenie.



Na obrázku vidíme kužeľ definovaný pomocou euklidovskej normy, tzv. kužeľ druhého rádu:

$$\mathcal{C}_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq x_3\}.$$

Vo všeobecnosti možno pomocou ľubovoľnej vektorovej normy $\|.\|$ definovať tzv. normový kužeľ

$$\mathcal{C}_{\|.\|} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid \|x\| \leq t\}.$$

Polyedrické množiny a polyédre

Definícia: Konvexná množina $\mathcal{P}$ sa nazýva **polyedrická**, ak je množinou riešení konečného počtu lineárnych rovníc a nerovníc. Teda $\mathcal{P}$ vieme vyjadriť ako

$$\mathcal{P} = \{x \mid a_j^T x \leq b_j, j = 1, \ldots, m,\ c_j^T x = d_j, j = 1, \ldots, p\}.$$

Ak je množina $\mathcal{P}$ navyše ohraničená, budeme ju nazývať **konvexný polyéder.**

Zrejme každá nadrovina $\{x \mid c_i^T x = d_i\}$ je prienikom polpriestorov $\{x \mid c_i^T x \leq d_i\}$ a $\{x \mid c_i^T x \geq d_i\}$. Preto môžeme ekvivalentne definovať konvexnú polyedrickú množinu len ako prienik polpriestorov, t.j.

$$\mathcal{P} = \{x \mid a_i^T x \leq b_i,\ i = 1, \ldots, r\}.$$

Konvexné, kónické a afinné kombinácie bodov

Nech $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Potom pre ľubovoľné $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ môžeme vytvoriť tzv. **lineárnu** kombináciu bodov $x_1, \ldots, x_k$ ako

$$y = \lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_k x_k.$$

Množina všetkých lineárnych kombinácií vektorov $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ tvorí vektorový podpriestor, ktorý označujeme $\mathrm{span}[x_1, \ldots, x_k]$.

Ak pridáme dodatočné podmienky pre koeficienty $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, dostávame pojem tzv. **afinnéj, kónickej a konvexnej kombinácie** bodov.

Kombinácia $y = \lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_k x_k$ je

afinná, ak	$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$,	-
kónická, ak	-	$\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$,
konvexná, ak	$\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$,	$\lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0$.

Afinný obal množiny $\mathcal{C}$ - $\mathrm{aff}\mathcal{C}$ - množina všetkých afinných kombinácií bodov množiny $\mathcal{C}$

$$\mathrm{aff}\mathcal{C} = \{x = \lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_k x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{C}, \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1, k \in \mathbb{N}\}.$$

Afinný obal množiny C je teda najmenšia afinná množina obsahujúca C.

Kónický obal množiny $\mathcal{C}$ - $\mathrm{cone}\mathcal{C}$ - množina všetkých kónických kombinácií bodov množiny $\mathcal{C}$

$$\mathrm{cone}\mathcal{C} = \{x = \lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_k x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{C}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0, k \in \mathbb{N}\}.$$

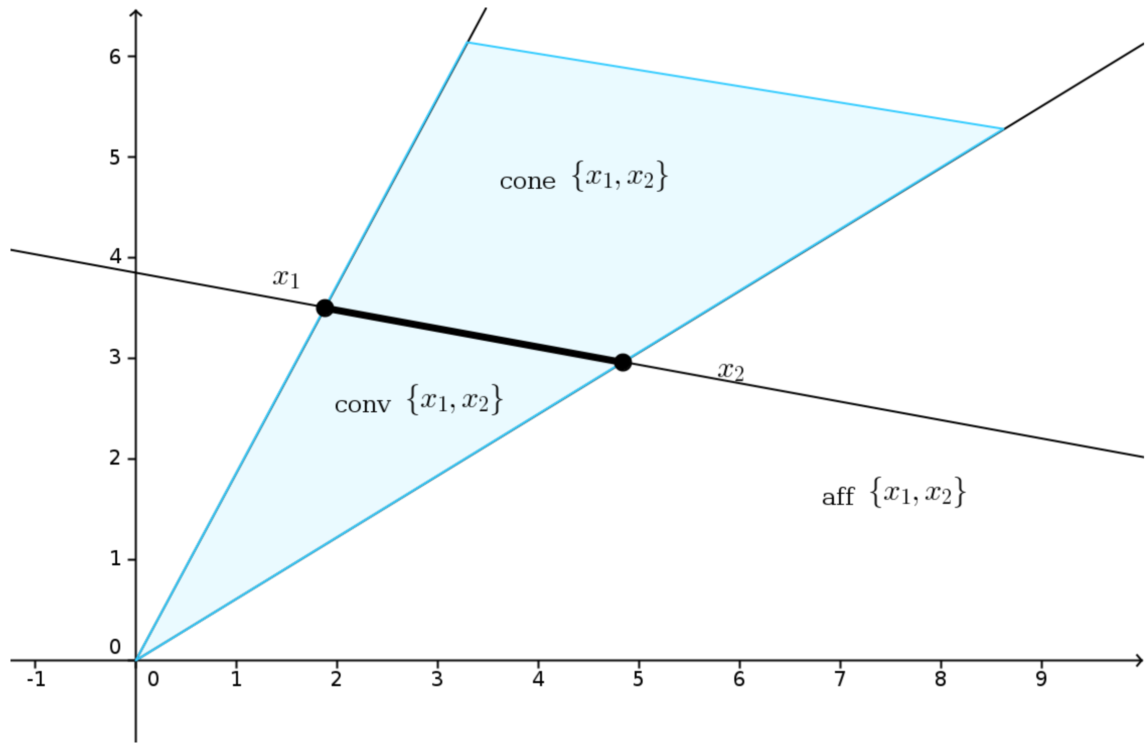
Kónický obal množiny C je teda najmenší konvexný kužeľ obsahujúci C.

Konvexný obal množiny $\mathcal{C}$ - $\mathrm{conv}\mathcal{C}$ - množina všetkých konvexných kombinácií bodov množiny $\mathcal{C}$

$$\mathrm{conv}\mathcal{C} =$$

$$\{x = \lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_k x_k \mid x_1, \ldots, x_k \in \mathcal{C}, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, k \in \mathbb{N}\}.$$

Konvexný obal množiny C je teda najmenšia konvexná množina obsahujúca C.



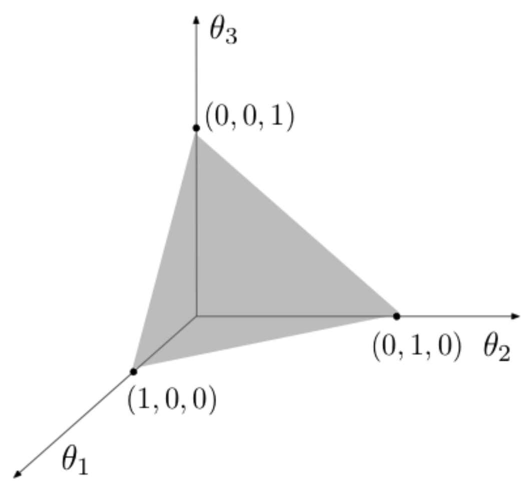
Afinný, konvexný a kónický obal dvojbodovej množiny.

Simplexy

Definícia: Majme daných $k+1$ bodov $x_0, x_1, \ldots, x_k$, ktoré sú afinne nezávislé. Akákoľvek množina, ktorú možno charakterizovať ako

$$\mathrm{conv}\{x_0, x_1, \ldots, x_k\},$$

sa nazýva k-**rozmerný simplex**.



Caratheodoryho veta

Veta: Nech $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je ľubovoľná množina. Potom každý bod $x \in \mathrm{conv} S$ možno vyjadriť ako konvexnú kombináciu **najviac** $n+1$ bodov množiny S.

Dôkaz: ...

Poznámky k uzavretosti

Veta: Ak $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktná, tak $\mathrm{conv}\mathcal{C}$ je kompaktná.

Dôkaz: ...

Príklad: Uzavretosť $\mathcal{C}$ nestačí.

$$\mathcal{C} = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 x_2 \geq 1\}.$$

Veta: Nech $\mathcal{C} = \{x^1, \ldots, x^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Potom $\mathrm{cone}\mathcal{C}$ je uzavretá množina.

Dôkaz: ...

Príklad: Kompaktnosť $\mathcal{C}$ nestačí.

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1\}.$$

Afinná dimenzia a relatívne vnútro

Afinná dimenzia množiny $C \subseteq \mathbb{R}^n$, ozn. $\operatorname{aff}\dim C$, je dimenzia jej afinného obalu. Táto definícia nie je vždy konzistentná s inými definíciami dimenzie.

Ak $\operatorname{aff}\dim C < n$, má zmysel definovať tzv. relatívne vnútorný bod množiny C a relatívne vnútro.

Definícia:
Daná je množina C. Označme $\mathcal{A} = \mathrm{aff}$. Bod $\hat{x}$ nazveme **relatívne vnútorným bodom** C ak existuje nejaké jeho epsilon okolie $\mathcal{O}_\varepsilon(\hat{x})$ také, že

$$\mathcal{O}_\varepsilon(\hat{x}) \cap \mathcal{A} \subseteq C.$$

Množinu všetkých relatívne vnútorných bodov množiny C nazveme **relatívnym vnútrom** a budeme ho označovať $\mathrm{relint} C$. **Relatívnou hranicou** budeme nazývať množinu $\mathrm{cl} C \setminus \mathrm{relint} C$.

Príklad:

Uvažujme množinu

$$C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1, x_3 = 0\}.$$

Afinným obalom množiny C je rovina určená osami x_1, x_2, jej afinná dimenzia je 2, $\mathrm{int} C = \emptyset$ a

$$\mathrm{relint} C = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -1 < x_1 < 1, -1 < x_2 < 1, x_3 = 0\}.$$

Tvrdenie: Nech C je konvexná množina. Potom aj $\mathrm{relint} C$ je konvexná množina.

Dôkaz: Cvičenie.