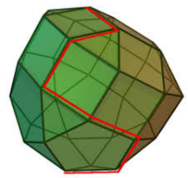
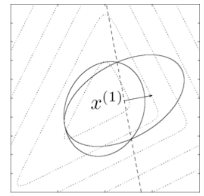
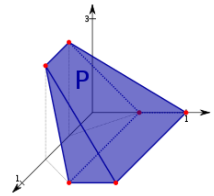
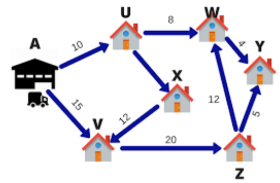
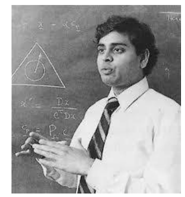
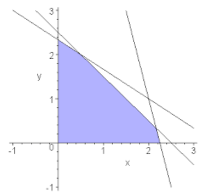


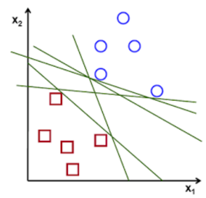


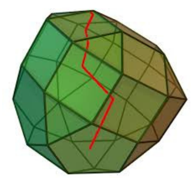






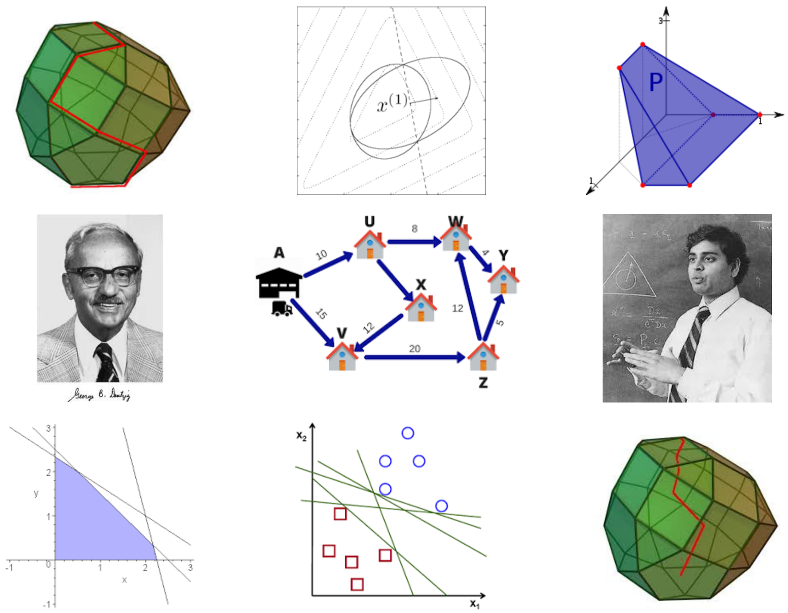






Lineárne programovanie zimný semester 2019/29

M. Trnovská, KAMŠ, FMFI UK



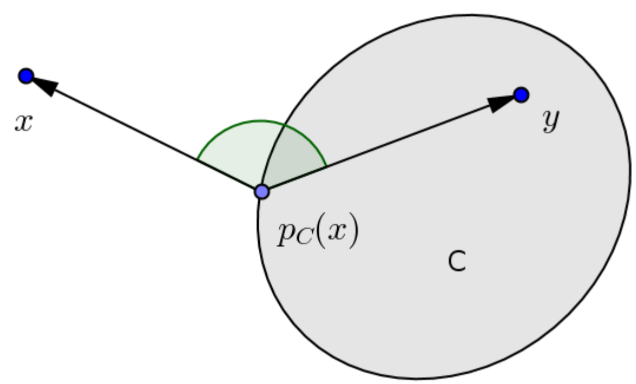
Konvexná analýza - separácia množín

Lema: Nech $\emptyset \neq C \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexná a uzavretá množina. Potom $\forall x \notin C$ existuje jediný bod

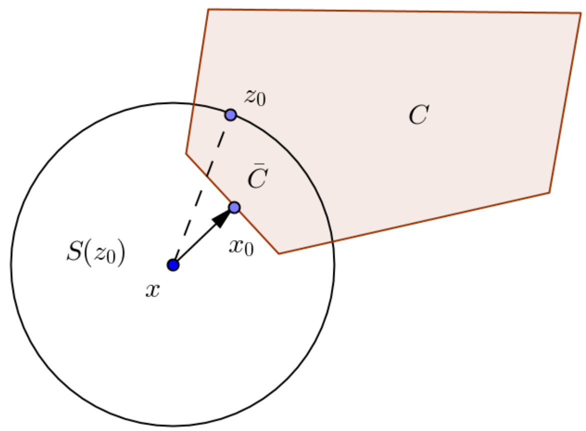
$$p_C(x) = \arg\min_{z \in C} \|z - x\|_2 = \arg\min_{z \in C} \|z - x\|_2^2,$$

pričom $\forall y \in C$ platí

$$(y - p_C(x))^T (x - p_C(x)) \leq 0. \tag{1}$$



Dôkaz:...



Definícia:
Nech $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexná. **Projekciou** bodu $x \in \mathbb{R}^n$ na množinu C budeme nazývať bod

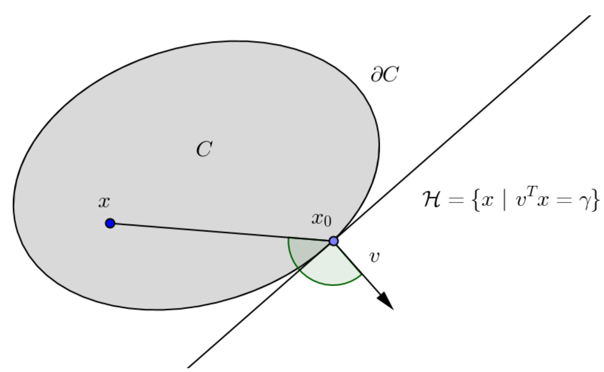
$$p_C(x) = \begin{cases} \arg\min_{z \in \mathrm{cl} C} \|z - x\|_2 & x \notin \mathrm{cl} C \\ x & x \in \mathrm{cl} C \end{cases}$$

Veta (o opornej nadrovine):
Nech $C \neq \emptyset$ je konvexná množina a $x_0 \notin \mathrm{int} C$. Potom existuje vektor $v \neq 0$ taký, že

$$v^T(x - x_0) \leq 0, \ \forall x \in C.$$

Dôkaz:...

Definícia:
Nadrovina $\mathcal{H} = \{x \mid v^T x = v^T x_0\}$ sa nazýva **oporná nadrovina** množiny C v bode x_0.



Veta (o separovaní konvexných množín)
Nech $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ sú konvexné disjunktné množiny, t.j. $A \cap B = \emptyset$.
Potom existuje vektor $v \neq 0$ taký, že

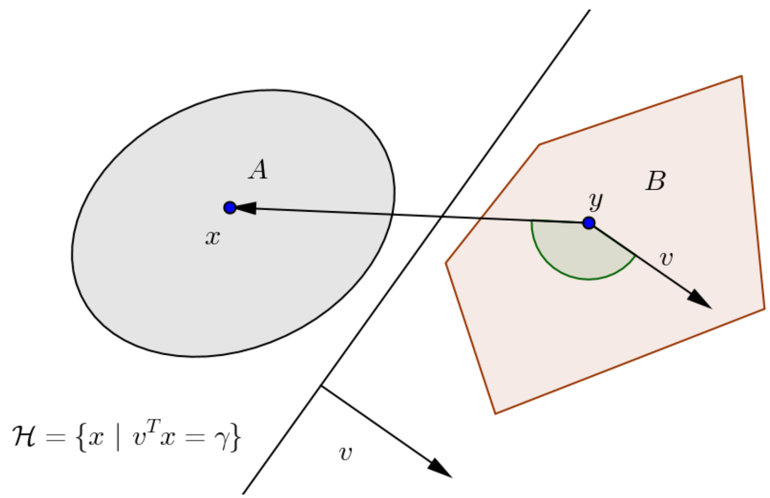
$$v^T x \leq v^T y, \ \forall x \in A, \forall y \in B.$$

Dôkaz:...

Definícia:
Nadrovina $\mathcal{H} = \{z \mid v^T z = \gamma\}$ spĺňajúca

$$v^T x \leq \gamma \ \forall x \in A, \ v^T y \geq \gamma \ \forall y \in B,$$

sa nazýva **separujúca (oddeľujúca, deliaca) nadrovina** množín A, B.



Nadrovina $\mathcal{H}$ oddeľuje konvexné, disjunktné množiny A a B. Jej normálový vektor v zviera s vektorom $x - y$ tupý uhol.

Veta (o ostrom separovaní bodu a konvexnej množiny)
Nech $C \neq \emptyset$ je konvexná a uzavretá a nech $x_0 \notin C$. Potom existuje nadrovina $\mathcal{H}$ daná vektorom $v \neq 0$ a konštantou γ taká, že platí

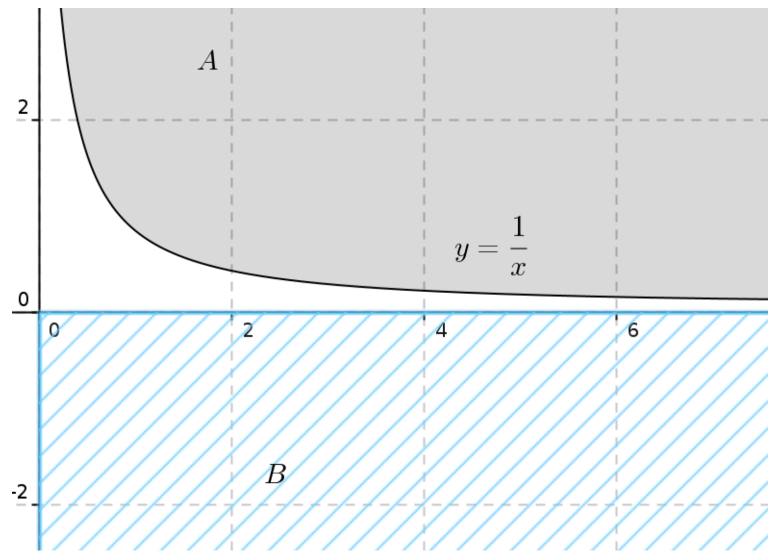
$$v^T x_0 > \gamma,\ v^T x < \gamma\ \forall x \in C.$$

Dôkaz:...

Veta (o ostrom separovaní dvoch konvexných množín)
Nech $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ sú konvexné, uzavreté, disjunktné možiny a nech B je navyše ohraničená. Potom existuje nadrovina $\mathcal{H}$ daná vektorom $v \neq 0$ a konštantou μ taká, že platí

$$v^T x > \mu,\ \forall x \in A,\ v^T y < \mu,\ \forall y \in B.$$

Dôkaz:...



Príklad:

Predpoklad kompaktnosti jednej z množín vo Vete o ostrom separovaní dvoch konvexných množín je nevyhnutný. Ak je napr. množina A nadúrovňovou množinou funkcie $f(x,y) = xy$ na kladnom ortante a množina $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \leq 0\}$. Obe množiny sú konvexné, uzavreté a neohraničené a platí $A \cap B = \emptyset$. V tomto prípade nie je (Minkowského) rozdiel $C = A - B$ uzavretá množina.

Veta (o ostrom separovaní konvexného kužeľa):
Nech $K \neq \emptyset$ je konvexný a uzavretý kužeľ a nech C je kompaktná konvexná množina a platí $K \cap C = \emptyset$. Potom existuje nadrovina $\mathcal{H}$ daná vektorom $v \neq 0$ a konštantou $\gamma = 0$ (t.j. prechádza počiatkom) taká, že platí

$$v^T x \leq 0 \; \forall x \in K, v^T y > 0, \; \forall y \in C.$$

Dôkaz:...

Veta (o separovaní konvexného kužeľa):
Nech $K \neq \emptyset$ je konvexný kužeľ, $C \neq \emptyset$ je konvexná množina $\mathrm{relint} K \cap \mathrm{relint} C = \emptyset$. Potom existuje nadrovina $\mathcal{H}$ daná vektorom $v \neq 0$ a konštantou $\gamma = 0$ (t.j. prechádza počiatkom) taká, že platí

$$v^T x \leq 0 \; \forall x \in K, v^T y \geq 0, \; \forall y \in C.$$

Dôkaz:...

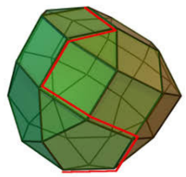
Zhrnutie

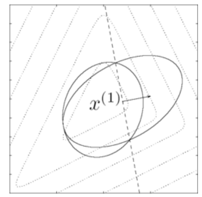
- Projekcia bodu na konvexnú množinu je dobre definovaná.

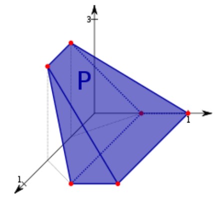
- V ľubovoľnom hraničnom bode konvexnej množiny možno viesť opornú nadrovinu tejto množiny.

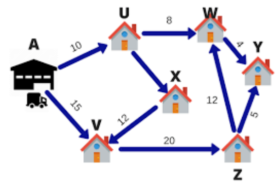
- Dve disjunktné konvexné množiny možno separovať nadrovinou. Ostrá separácia je možná, ak sú obe množiny uzavreté a jedna z nich je ohraničená.

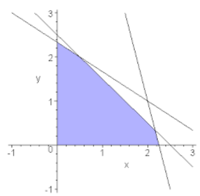
- Konvexný kužeľ možno oddeliť od konvexnej množiny nadrovinou, ktorá prechádza počiatkom.

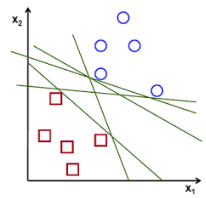


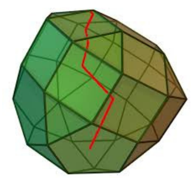












Farkasova lema

Veta: (Farkas, 1920)
Nech A je matica typu $m \times n$ a $b \in \mathbb{R}^m$. Potom platí práve jedna z alternatív:

I $\exists x \geq 0 : \; Ax = b;$

II $\exists y : A^T y \geq 0, \; b^T y < 0.$

Dôkaz: ...

Ekvivalentne možno Farkasovu lemu naformulovať nasledovným spôsobom: Nech A je matica typu $m \times n$ a $b \in \mathbb{R}^m$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

(i) $\exists x \geq 0 : \; Ax = b;$

(ii) $\forall y : A^T y \geq 0 \; \Rightarrow \; b^T y \geq 0.$

Dôsledok:
Nech A je matica typu $m \times n$ a $c \in \mathbb{R}^n$. Potom platí práve jedna z alternatív:

I $\exists y: \; A^T y \leq c$;

II $\exists z \geq 0 : Az = 0, \; b^T z < 0$.

Dôkaz: ...

Ekvivalentne možno Dôsledok naformulovať nasledovným spôsobom: Nech A je matica typu $m \times n$ a $c \in \mathbb{R}^n$. Potom sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

(i) $\exists y: \; A^T y \leq c$;

(ii) $\forall z \geq 0 : Az = 0 \; \Rightarrow \; c^T z \geq 0$.