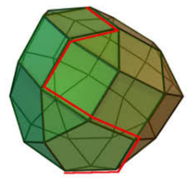
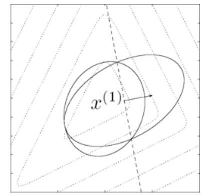
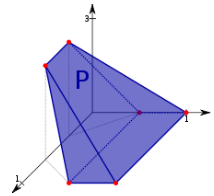
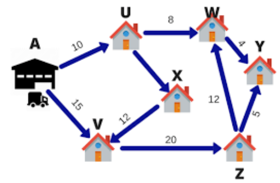
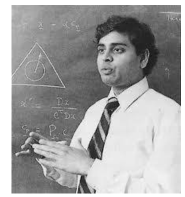
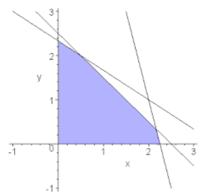
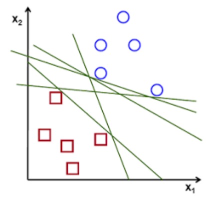
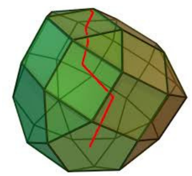



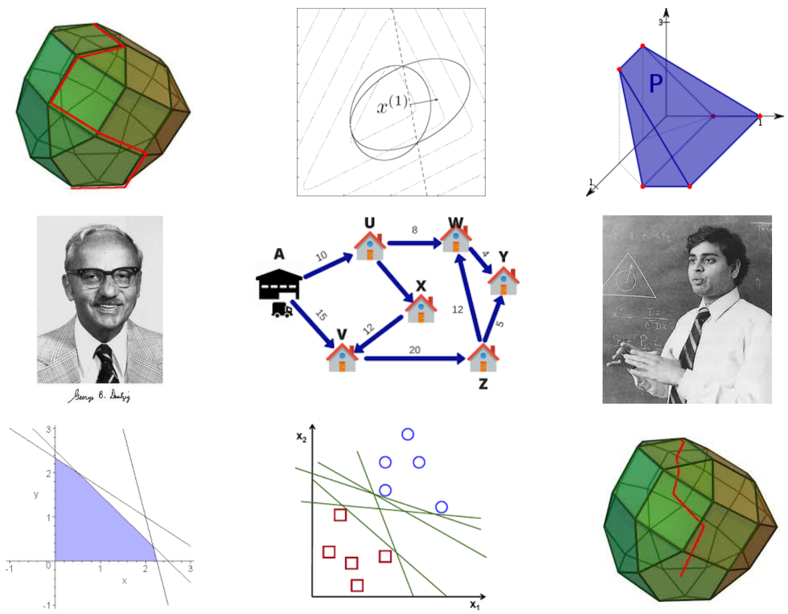


Lineárne programovanie zimný semester 2019/20

M. Trnovská, KAMŠ, FMFI UK



Teória duality

Budeme skúmať úlohy lineárneho programovania

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & x \in \mathcal{P}, \end{aligned}$$

kde $\mathcal{P}$ je konvexná polyedrická množina prípustných riešení. Túto úlohu budeme nazývať **primárna úloha.**

V lineárnom programovaní môže nastať niekoľko situácií:

1. Úloha je **neprípustná**, t.j. $\mathcal{P} = \emptyset$.

2. Úloha je **neohraničená**, t.j. $\exists \, \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{P}$ tak, že $\lim_{k\to\infty} c^T x_k = -\infty$.

3. Úloha má **konečné minimum**, t.j. $\exists x^* \in \mathcal{P}$ taký, že $c^T x^* \leq c^T x \; \forall x \in \mathcal{P}$.

V závislosti od toho definujeme **optimálnu hodnotu**

$$p^* = \inf_{x \in \mathcal{P}} c^T x = \begin{cases} +\infty & \text{ak je úloha neprípustná;} \\ -\infty & \text{ak je úloha neohraničená;} \\ c^T x^* & \text{ak existuje bod minima } x^*. \end{cases}$$

Množinu optimálnych riešení budeme značiť $\mathcal{P}^*$, t.j.

$$\mathcal{P}^* = \{x^* \in \mathcal{P} \mid c^T x^* = p^*\}.$$

Táto množina môže byť prázdna (prípad 1. a 2.) alebo neprázdna (prípad 3).

Odvodenie duálnej úlohy

Príklad.

Primárna úloha:

$$\begin{aligned} \min \quad & 5x_1 + x_2 + 3x_3 \\ & 2x_1 + 2x_2 \geq 1, \\ & 3x_1 - x_2 + x_3 \geq 3, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Duálna úloha:

$$\begin{aligned} \max \quad & y_1 + 3y_2 \\ & 2y_1 + 3y_2 \leq 5, \\ & 2y_1 - y_2 \leq 1, \\ & y_2 \leq 3, \\ & y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Duálna úloha pre úlohy LP v základnom tvare

Primárna úloha:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
& Ax \geq b, \\
& x \geq 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$.

Duálna úloha:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & b^T y \\
& A^T y \leq c, \\
& y \geq 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Duálna úloha pre úlohy LP v základnom tvare

Primárna úloha:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$.

Duálna úloha:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ & A^T y \leq c. \end{aligned} \tag{4}$$

Duálna úloha pre úlohy LP v základnom tvare

Primárna úloha:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax \geq b, \end{aligned} \tag{5}$$

kde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$.

Duálna úloha:

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ & A^T y = c, \\ & y \geq 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Duálna úloha pre všeobecnú úlohu LP

Primárna úloha:

$$\begin{array}{ll} \min & (c^1)^T x^1 + (c^2)^T x^2 \\ & A_{11} x^1 + A_{12} x^2 \geq b^1, \\ & A_{21} x^1 + A_{22} x^2 = b^2, \\ & x^1 \geq 0, \end{array} \tag{7}$$

Duálna úloha:

$$\begin{array}{ll} \max & (b^1)^T y^1 + (b^2)^T y^2 \\ & A_{11}^T y^1 + A_{21}^T y^2 \leq c^1, \\ & A_{12}^T y^1 + A_{22}^T y^2 = c^2, \\ & y^1 \geq 0. \end{array} \tag{8}$$

Vo všeobecnosti ku každej minimalizačnej úlohe lineárneho programovania existuje jej duálny proťajšok tvaru

$$\begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ & y \in \mathcal{D}, \end{aligned}$$

kde $\mathcal{D}$ je konvexná polyedrická množina prípustných riešení duálnej úlohy.

Analogicky, ako v prípade primárnej úlohu definujeme
optimálnu hodnotu

$$d^* = \sup_{y \in \mathcal{D}} b^T y = \begin{cases} -\infty & \text{ak } \mathcal{P} = \emptyset; \\ +\infty & \text{ak } \exists \ \{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{D} : \ \lim_{k\to\infty} b^T y_k = +\infty; \\ b^T y^* & \text{ak existuje bod maxima } y^*. \end{cases}$$

Množinu optimálnych riešení duálnej úlohy budeme značiť $\mathcal{D}^*$, t.j.

$$\mathcal{D}^* = \{y^* \in \mathcal{D} \mid b^T y^* = d^*\}.$$

Slabá dualita a jej dôsledky

V nasledujúcom budeme uvažovať primárno duálnu dvojicu úloh lineárneho programovania:

$$\begin{array}{llcll} \min & c^T x & \qquad\qquad & \max & b^T y \\ & x \in \mathcal{P}, & & & y \in \mathcal{D}, \end{array}$$

Veta o slabej dualite:
Pre každé $x \in \mathcal{P}$ a $y \in \mathcal{D}$ platí

$$b^T y \leq c^T x.$$

a) Ak $\hat{x} \in \mathcal{P}$ a $\hat{y} \in \mathcal{D}$ sú také, že platí $c^T\hat{x} = b^T\hat{y}$, tak $\hat{x}$ je optimálne riešenie primárnej úlohy a $\hat{y}$ je optimálne riešenie duálnej úlohy.

b) Pre optimálne hodnoty platí $d^* \leq p^*$.

c) Ak $\mathcal{P} \neq \emptyset$ a účelová funkcia primárnej úlohy je zdola neohraničená na $\mathcal{P}$, tak $\mathcal{D} = \emptyset$.

d) Ak $\mathcal{D} \neq \emptyset$ a účelová funkcia duálnej úlohy je zhora neohraničená na $\mathcal{D}$, tak $\mathcal{P} = \emptyset$.

Príklad:

V nasledujúcom ukážeme, že v lineárnom programovaní vždy platí $d^* = p^*$ okrem prípadu, keď sú obe úlohy neprípustné, t.j. $-\infty = d^* < p^* = +\infty$. Príkladom takej dvojice úloh je

$$\begin{aligned} \min \quad & x \\ & 0x \geq 1, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max \quad & y \\ & 0y = 1, \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Silná dualita a existencia optimálnych riešení

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ & A^T y \leq c, \end{array}$$

Veta:

a) Ak $\mathcal{P} = \emptyset$, $\mathcal{D} \neq \emptyset$, tak $d^* = +\infty$.

b) Ak $\mathcal{D} = \emptyset$, $\mathcal{P} \neq \emptyset$, tak $p^* = -\infty$.

Dôsledok: Ak je jedna z dvojice úloh prípustná, tak

$$p^* = -\infty \Leftrightarrow d^* = -\infty, \quad p^* = \infty \Leftrightarrow d^* = \infty.$$

Veta: Ak má systém

$$Ax = b,\ x \geq 0,\ A^T y \leq c \tag{9}$$

riešenie, tak má riešenie aj systém

$$Ax = b,\ x \geq 0,\ A^T y \leq c,\ b^T y \geq c^T x. \tag{10}$$

Dôkaz: ...

Veta: Ak $\mathcal{P} \neq \emptyset$ a $\mathcal{D} \neq \emptyset$ tak existujú aj optimálne riešenia $(x^*, y^*) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D}$ spĺňajúce

$$b^T y^* = c^T x^*.$$

Veta: Ak je aspoň jedna z primárno duálnej dvojice úloh prípustná, tak

$$p^* = d^*.$$

Dôsledok: Ak
- $\mathcal{P} \neq \emptyset$ a účelová funkcia primárnej úlohy je zdola ohraničená,
alebo
- $\mathcal{D} \neq \emptyset$ a účelová funkcia duálnej úlohy je zhora ohraničená,
tak obe úlohy sú prípustné a nadobúdajú optimálne riešenia x^*, y^*, pričom platí

$$b^T y^* = d^* = p^* = c^T x^*.$$

Komplementarita v lineárnom programovaní

Veta (o komplementarite): Daná je primárno-duálna dvojica úloh LP

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ & A^T y \leq c. \end{array}$$

Prípustné riešenia $x \in \mathcal{P}, y \in \mathcal{D}$ sú optimálne práve vtedy, keď platí

$$x^T (c - A^T y) = 0.$$

Dôkaz: ...

Analogicky pre iné primárno-duálne dvojice úloh, napr.:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \geq b, \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ & A^T y = c, \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Prípustné riešenia $x \in \mathcal{P}, y \in \mathcal{D}$ sú optimálne práve vtedy, keď platí

$$y^T (Ax - b) = 0.$$

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \geq b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ & A^T y \leq c, \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Prípustné riešenia $x \in \mathcal{P}, y \in \mathcal{D}$ sú optimálne práve vtedy, keď platí

$$x^T (c - A^T y) = 0, \; y^T (Ax - b) = 0.$$

Príklad: Daná je úloha LP

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ & x_1 \geq 1, \\ & x_1 + x_2 \geq 2, \\ & x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 4, \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Duálna úloha má tvar

$$\begin{aligned} \max \quad & y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 \\ & y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 1, \\ & y_2 + y_3 + y_4 \leq 2, \\ & y_3 + y_4 \leq 3, \\ & y_4 \leq 4, \\ & y_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Veta (o ostro komplementárnom riešení):
Daná je primárno-duálna dvojica úloh LP

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max \quad & b^T y \\ & A^T y \leq c. \end{aligned}$$

Ak sú obe úlohy prípustné, tak existuje optimálne riešenie s vlastnosťou

$$x_j = 0 \ \Rightarrow \ (a^j)^T x > c_j, \ i = 1, \ldots, n.$$

Poznámka: Ak označíme $s = c - A^T y$, tak predchádzajúca veta hovorí, že ak sú obe úlohy prípustné, tak existuje optimálne riešenie také, že

$$x^T s = 0, x + s > 0.$$

Analogicky pre iné primárno-duálne dvojice úloh, napr.:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \geq b, \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ & A^T y = c, \\ & y \geq 0. \end{array}$$

Ostro komplementárne optimálne riešenie: $w = Ax - b$, $y^T w = 0$, $y + w > 0$.

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax \geq b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & b^T y \\ & A^T y \leq c, \\ & y \geq 0. \end{array}$$

Ostro komplementárne optimálne riešenie: $w = Ax - b$, $s = c - A^T y$. $x^T s = 0$, $x + s > 0$, $y^T w = 0$, $y + w > 0$.

Dôsledok: Ak má primárna aj duálna úloha LP jedniné riešenie, tak spolu tvoria ostro komplementárne riešenie.

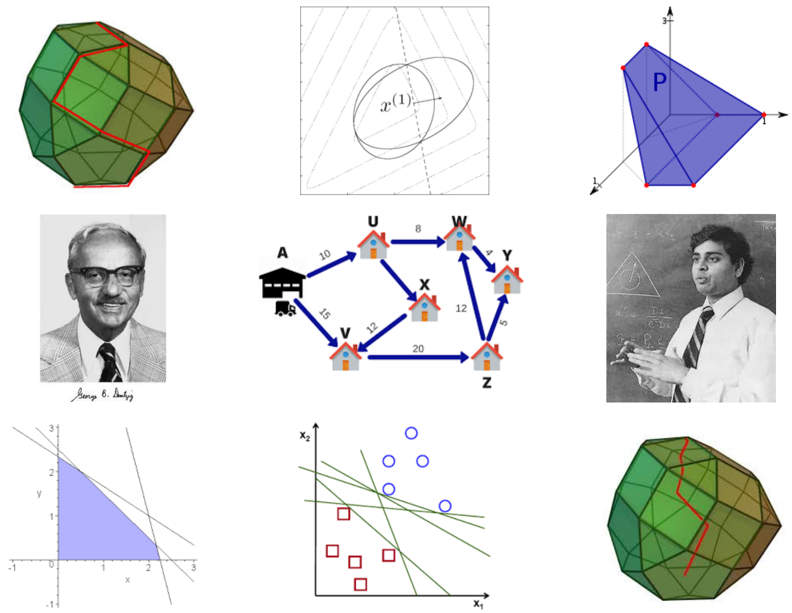
Príklad:

1.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ & \mathbf{1}^T x = 1, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \\ & \mathbf{1}^T x = 1, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$



Ekonomická interpretácia duality

Dopravný problém

Určitý tovar sa vyrába v m výrobných strediskách. Za jednotku času vyrobí i -te výrobné stredisko $a_i > 0$ jednotiek tohoto tovaru, $i = 1, \ldots, m$. Tovar sa dopravuje do n odbytových stredísk, pričom j-te odbytové stredisko požaduje za jednotku času $b_j > 0$ jednotiek tovaru, $j = 1, \ldots, n$. Predpokladáme, že platí

$$a_1 + \cdots + a_m = b_1 + \cdots + b_n,$$

teda, že výroba presne pokrýva požiadavky stredísk. Za dopravu z i-teho výrobného strediska do j-teho odbytového strediska je daná sadzba c_{ij}. Úlohou je nájsť taký plán prepravy, aby celkové dopravné náklady boli minimálne. Premennými úlohy budú x_{ij} označujúce množstvo tovaru, ktoré sa dopraví z i-teho výrobného strediska do j-teho odbytového strediska.

Dopravný problém má nasledujúcu formuláciu:

$$
\begin{array}{rl}
\min & \Sigma_{i=1}^{m} \Sigma_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
& -\Sigma_{j=1}^{n} x_{ij} = -a_i, \; i = 1, \ldots, m, \\
& \Sigma_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j = 1, \ldots, n. \\
& x_{ij} \geq 0, \; i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n,
\end{array}
$$

kde v prvých m rovniciach v ohraničeniach sme zmenili znamienko, čo reprezentuje fakt, že tovar "odchádza" z odbytových stredísk.

Duálna úloha k tejto úlohe je

$$
\begin{array}{rl}
\max & \Sigma_{j=1}^{n} b_j v_j - \Sigma_{i=1}^{m} a_i u_i \\
& v_j - u_i \leq c_{ij} \; i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.
\end{array}
$$

Interpretácia:

Firma chce odkúpiť od nás tovar vyrobený v i-tom výrobnom stredisku za cenu u_i a predať ho v j-tom odbytovom stredisku za cenu v_j, pričom ceny sa stanovia tak, aby platilo

$$v_j - u_i \leq c_{ij} \; i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

Firma, ktorá nám túto ponuku dala chce však maximalizovať svoj zisk

$$\sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{i=1}^{m} a_i u_i,$$

pričom ale musí dodržať stanovené podmienky na ceny. To vedie na spomínanú duálnu úlohu.

Úloha plánovania výroby

Predpokladajme, že výrobca môže vyrábať n rôznych výrobkov. Pri plánovaní výroby treba vziať do úvahy obmedzenú kapacitu m zdrojov. Kritérium optimality je maximalizácia zisku. Ak označíme pre $i \in \{1, \ldots, m\}$ a $j \in \{1, \ldots, n\}$

b_i	množstvo i-teho zdroja, ktorý máme k dispozícii,
a_{ij}	množstvo i-teho zdroja potrebného na výrobu j-teho výrobku,
p_j	cenu jednotkového množstva j-teho výrobku,
x_j	množstvo j-teho výrobku,

Úloha plánovania výroby:

$$\max \quad \Sigma_{j=1}^{n} p_j x_j$$

$$\Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \ i = 1, \ldots m,$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n.$$

Duálna úloha:

$$\min \quad \Sigma_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\Sigma_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq p_j, \ j = 1, \ldots n,$$

$$y_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, m,$$

Interpretácia:

Podnikateľ chce od výrobcu odkúpiť zdroje s minimálnymi nákladmi. Otázkou je aké ceny $y_1, \ldots, y_m$ by mal navrhnúť. Výrobca nebude súhlasiť s predajom pokiaľ nebude splnené

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq p_j, \ j = 1, \ldots n.$$

Podnikaťeľ však chce odkúpiť zdroje čo najvýhodnejšie a teda minimalizuje náklady

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i.$$

Problém výživy

Uvažujme zjednodušenú formuláciu problému výživy. Ak označíme pre $i = 1, \ldots, m$ a $j = 1, \ldots, n$

a_{ij}	obsah vitamínu i v potravine j,
c_j	cenu porcie potraviny j,
b_i	požadované množstvo vitamínu i za deň,

tak problém výživy bez ohraničenia na denný limit na počet porcií potraviny možno zapísať ako nasledovnú úlohu LP

$$
\begin{array}{lll}
\min & c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n & \\
 & \Sigma_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, & i = 1, \ldots, m, \\
 & x_j \geq 0, & j = 1, \ldots n,
\end{array}
$$

kde premenné x_j predstavujú počet porcií potraviny j za deň.

Predstavme si, že namiesto potravín je možné kupovať priamo vitamíny. Otázka je, akú cenu by si mal stanoviť ich predajca tak aby konkuroval predajcom potravín. Je rozumné cenu stanoviť tak, aby platilo

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j, \; j = 1, \ldots, n.$$

Predajca teda rieši úlohu

$$\begin{array}{ll} \max & \Sigma_{i=1}^{m} b_i y_i \\ & \Sigma_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \leq c_j, \; j = 1, \ldots, n, \\ & 0 \leq y_i, i = 1, \ldots m, \end{array}$$

čo je duálna úloha k problému výživy.