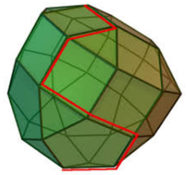
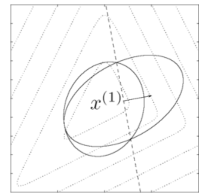
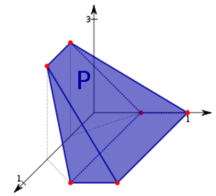
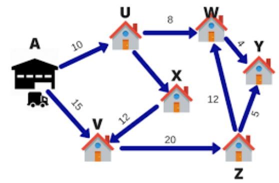
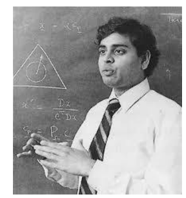
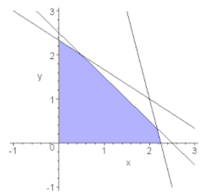


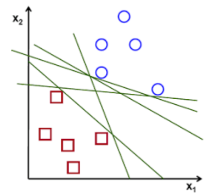


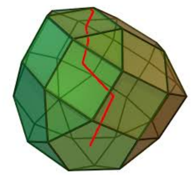



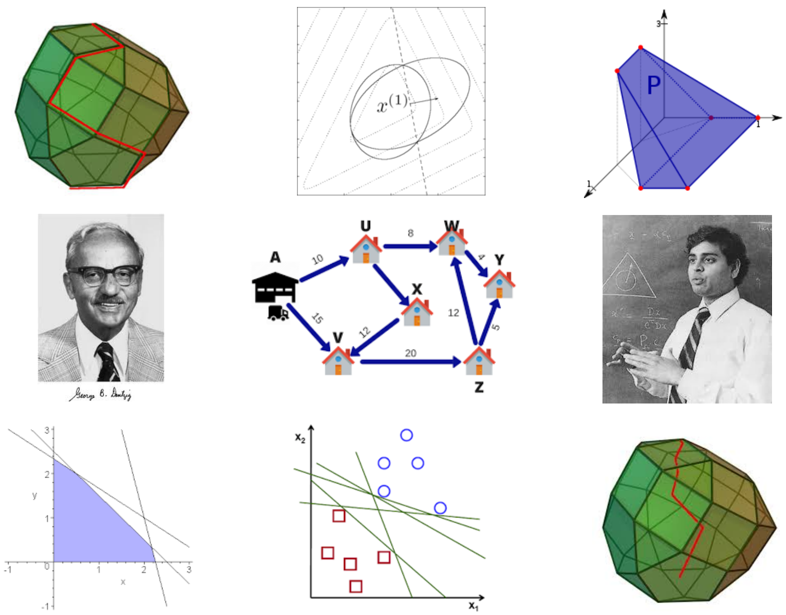






# Lineárne programovanie
# zimný semester 2019/20

M. Trnovská, KAMŠ, FMFI UK




# Základná veta lineárneho programovania

## Bázické riešenia

Uvažujme systém rovníc

$$Ax = b,$$

kde $A$ je $m \times n$ matica, $x \in \mathbb{R}^n$ sú premenné a $b \in \mathbb{R}^m$.

**Predpoklad:** Rozmery matice spĺňajú $m < n$ a riadky sú lineárne nezávislé, t.j. $h(A) = m$.

Pri tomto predpoklade budem mať systém $Ax = b$ vždy riešenie ale nie jediné. (Prečo?)

Matica $A$ má $m$ lineárne nezávislých stĺpcov, ktoré zrejme tvoria bázu $\mathbb{R}^m$. Označme tieto stĺpce $a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}$. Potom zrejme existujú koeficienty $\beta_1, \ldots, \beta_m$, pomocou ktorých vieme vektor $b \in \mathbb{R}^m$ **jednoznačne** vyjadriť v báze $a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}$:

$$b = \beta_1 a_{j_1} + \cdots + \beta_m a_{j_m}.$$

**Definícia:** Daný je systém lineárnych rovníc $Ax = b$ spĺňajúci vyššie uvedený predpoklad. Nech $\mathcal{B} = \{a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}\}$ je báza $\mathbb{R}^m$ daná stĺpcami $a_{j_1}, \ldots, a_{j_m}$ matice $A$. Potom riešenie systému $x_{\mathcal{B}}$ sa nazýva **bázické riešenie** vzhľadom na bázu $\mathcal{B}$, ak

$$x_j = \begin{cases} \beta_k & \text{ak } j = j_k \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Zložky vektora $x$ zodpovedajúce bázovým indexom $j_1, \ldots, j_m$ sa nazývajú **bázické premenné.**

**Príklad.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \;\; b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Označme

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Potom zrejme

$$b = 1.a_1 + 1.a_2 + 1.a_3 = 1.a_1 + 1.a_2 + 1.a_4.$$

Teda $x = (1, 1, 1, 0)^T$ je bázické riešenie vzhľadom na bázu $\{a_1, a_2, a_3\}$ a $x = (1, 1, 0, 1)^T$ je bázické riešenie vzhľadom na bázu $\{a_1, a_2, a_4\}$. Avšak $x = (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})^T$ nie je bázické riešenie vzhľadom na žiadnu bázu.

Ak $x$ je riešenie systému $Ax = b$ také, pre ktoré sú stĺpce zodpovedajúce nenulovým zložkám lineárne nezávislé, tak $x$ je bázické riešenie vzhľadom na nejakú bázu.

**Definícia:** Ak je aspoň jedna z bázických premenných v bázickom riešení nulová, tak príslušné bázické riešenie budeme nazývať **degenerované.** V opačnom prípade budeme bázické riešenie nazývať **nedegenerované.**

**Príklad.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zrejme $x = (1, 0, 1, 0)^T$ a $x = (1, 0, 0, 1)$ sú degenerované bázické riešenia príslušného lineárneho systému.

**Definícia:** Daná je úloha LP v štandardom tvare

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Prípustné riešenie tejto úlohy budeme nazývať bázické, ak je bázickým riešením systému $Ax = b$. Analogicky definujeme degenerované a nedegenerované bázické prípustné riešenie, resp. optimálne bázické riešenie.

Analogicky by sme mohli definovať prípustné bázické riešenia pre maximalizačné úlohy v rovnicovom tvare.

## Základná veta lineárneho programovania

Nech $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $h(A) = m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Daná je úloha LP v štandardom tvare

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

(i) Ak existuje prípustné riešenie tejto úlohy, tak existuje prípustné bázické riešene tejto úlohy.

(ii) Ak existuje optimálne riešenie tejto úlohy, tak existuje optimálne bázické riešene tejto úlohy.

## Súvislosť s konvexnosťou

**Veta:** Nech $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$, $h(A) = m$. Označme

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

Vektor $x$ je krajným bodom $\mathcal{P}$ vtedy a len vtedy, keď $x$ je bázické prípustné riešenie zodpovedajúce množine $\mathcal{P}$.

**Dôkaz:** ...

## Zhrnutie

Uvažujme úlohu LP v štandardom tvare

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b \qquad (LP) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

s množinou prípustných riešení

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

- Ak $\mathcal{P} \neq 0$, tak má aspoň jeden krajný bod.
- Ak existuje optimálne riešenie úlohy (LP), tak existuje aj optimálne riešenie, ktoré je krajným bodom $\mathcal{P}$.