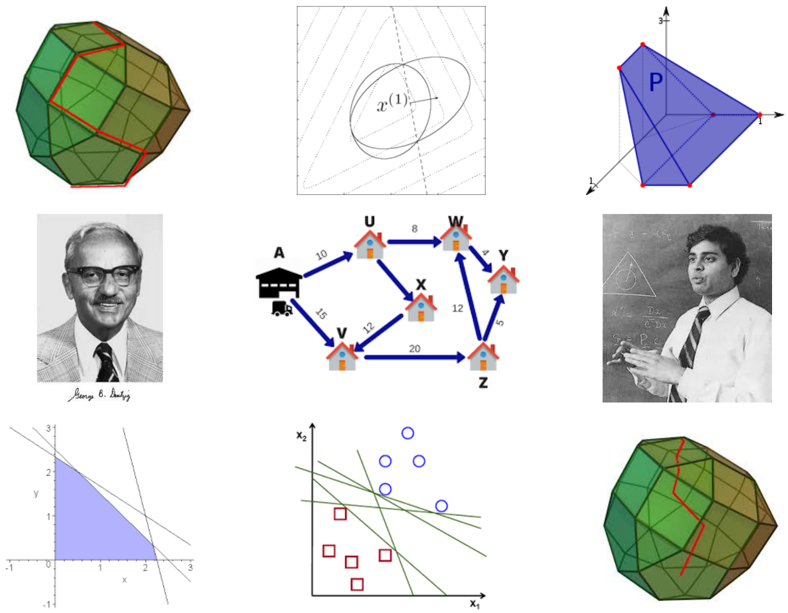
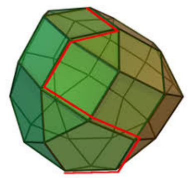
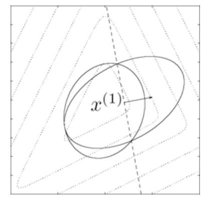
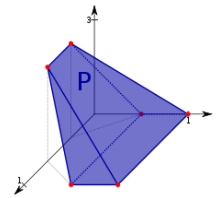


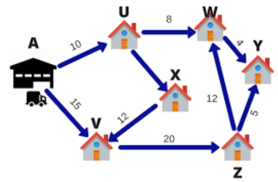
Lineárne programovanie zimný semester 2019/20

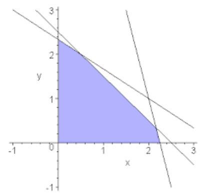
M. Trnovská, KAMŠ, FMFI UK

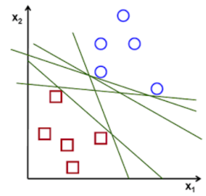


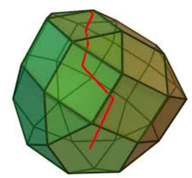












Simplexová metóda

Základná myšlienka

Uvažujme úlohu

$$\begin{array}{ll} \min\ (\max) & c^T x \\ & x \in \mathcal{P}, \end{array}$$

kde $\mathcal{P} \neq \emptyset$ je konvexná polyedrická množina, ktorá má krajné body, pričom jeden krajný bod x^0 poznáme.

Autorom nasledujúcej myšlienky simplexovéj metódy je **J.B.J. Fourier** (1862), ktorý študoval sústavy lineárnych rovníc v súvislosti s mechanikou a teóriou pravdepodobnosti.

Začíname teda v známom krajnom bode x_0 a rozlišujeme dva prípady:

1. Po žiadnej hrane vychádzajúcej z x_0 sa hodnota účelovej funkcie nezmenšuje (nezväčšuje) - potom x_0 je **optimálne riešenie** úlohy;

2. Existuje hrana h vychádzajúca z x_0, po ktorej sa hodnota účelovej funkcie zmenšuje (zväčšuje), potom

   2.1 Hrana h je polpriamka - nastáva neohraničenosť účelovej funkcie zdola (zhora);

   2.2 Hrana h je úsečka spájajúca x_0 a nejaký krajný bod x_1 - v tomto bode je teda hodnota účelovej funkcie menšia (väčšia).

Simplexová metóda na jednoduchom príklade

Daná je úloha LP

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
& 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 5 \\
& 4x_1 + x_2 + 2x_3 \le 11, \\
& 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 8, \\
& x_i \ge 0,\ \ i = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

Ekvivalentná úloha:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
& 2x_1 + 3x_2 + x_3 + w_1 = 5 \\
& 4x_1 + x_2 + 2x_3 + w_2 = 11, \\
& 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + w_3 = 8, \\
& x_i \ge 0, w_i \ge 0 \ i = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

Maticová reprezentácia:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right).$$

Doplnkové premenné w_1, w_2, w_3 sú bázické premenné zodpovedajúce štandardnej báze a príslušné bázické prípustné riešenie je

$$(x; w)^0 = (0, 0, 0; 5, 11, 8)^T.$$

Avšak hodnota účelovej funkcie

$$z := 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

v tomto bode je nula.

Skúsime zvýšiť hodnotu x_1 a hodnoty x_2, x_3 necháme zatiaľ nezmenené - t.j. $x_2 = x_3 = 0$ (ako v prvom bázickom riešení). Dosadením do rovníc v ohraničeniach dostávame

$$2x_1 + w_1 = 5,\ 4x_1 + w_2 = 11,\ 3x_1 + w_3 = 8,$$

čoho

$$w_1 = 5 - 2x_2 \geq 0,\ w_2 = 11 - 4x_1 \geq 0,\ w_3 = 8 - 3x_1 \geq 0.$$

Teda

$$x_1 = \frac{5}{2},\ w_1 = 0,\ w_2 = 1,\ w_3 = \frac{1}{2}.$$

Takto získame nové bázické riešenie

$$(x; w)^1 = (\frac{5}{2}, 0, 0, 0, 1, \frac{1}{2}),$$

pričom hodnota účelovej funkcie v tomto riešení je $\frac{25}{2}$.

Vyjadríme ešte nové bázické premenné x_1, w_2, w_3 ako aj hodnotu z pomocou nových nebázických premenných x_2, x_3, w_1:

$$
\begin{aligned}
x_1 = &\ \tfrac{5}{2} - \tfrac{3}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{1}{2}w_1, \\
w_2 = &\ 1 + 5x_2 + 2w_1, \\
w_3 = &\ \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{3}{2}w_1, \\
z = &\ \tfrac{25}{2} - \tfrac{7}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 - \tfrac{5}{2}w_1.
\end{aligned}
$$

Simplexová tabuľka:

$$
\text{0. krok:}\quad
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & w_1 & w_2 & w_3 & \\
\hline
2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
4 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 11 \\
3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 8 \\
\hline
5 & 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\,.
$$

$$
\text{1. krok:}\quad
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & w_1 & w_2 & w_3 & \\
\hline
1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} \\
0 & -5 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\
0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\
\hline
0 & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 0 & -\frac{25}{2}
\end{array}\,.
$$

Hodnota účelovej funkcie vyjadrená pomocou nebázických premenných je

$$z = \tfrac{25}{2} - \tfrac{5}{2}w_1 - \tfrac{7}{2}x_2 + \tfrac{1}{2}x_3.$$

Jediný kladný koeficient je pri premennej x_3. Skúsime teda zvýšiť hodnotu x_3 a hodnoty ostatných nebázických premenných necháme nezmenené, t.j. $x_2 = w_1 = 0$. Otázka je, ako veľmi môžeme zvýšiť hodnotu x_3 a ktorú z bázických premenných x_1, w_2, w_3 nahradíme x_3. Po dosadení do vyjadrení pre bázické premenné dostávame:

$$x_1 = \tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}x_3 \geq 0,\ w_2 = 1 \geq 0,\ w_3 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x_3 \geq 0.$$

V novom bázickom riešení teda bude

$$x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ w_1 = 0$$

a ostatné hodnoty dopočítame:

$$x_1 = \tfrac{5}{2} - \frac{1}{2}x_3 = 2,\ w_2 = 1,\ w_3 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x_3 = 0.$$

Nové bázické riešenie

$$(x; w)^2 = (2, 0, 1; 0, 1, 0),$$

pričom hodnota účelovej funkcie v tomto riešení je 13.

Opäť potrebujeme vyjadriť nové bázické premenné x_1, x_3, w_2 a hodnotu z pomocou nových nebázických premenných x_2, w_1, w_3:

$$\begin{aligned}
x_3 &= \; 1 + x_2 + 3w_1 - 2w_3, \\
x_1 &= \; 2 - 2x_2 - 2w_1 + w_3, \\
w_2 &= \; 1 + 5x_2 + 2w_1, \\
z &= \; 13 - 3x_2 - w_1 - w_3.
\end{aligned}$$

Simplexová tabuľka:

1. krok:

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$
0	-5	0	-2	1	0	1
0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$
0	$-\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	$-\frac{25}{2}$

2. krok:

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
1	2	0	2	0	-1	2
0	-5	0	-2	1	0	1
0	-1	1	-3	0	2	1
0	-3	0	-1	0	-1	-13

Koeficienty v aktuálnom predpise účelovej funkcie sú však záporné a teda hodnotu účelovej funkcie nie je možné zväčšiť. Optimálne riešenie je teda

$$x^* = (2, 0, 1), \ z^* = 13.$$

KONIEC.

Prípad neohraničenej úlohy

Príklad.

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ & 2x_1 - x_2 \le 3 \\ & -x_1 - 4x_2 + 3x_3 \le 5, \\ & x_i \ge 0, \ i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Ekvivalentná úloha

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ & 2x_1 - x_2 + w_1 = 3 \\ & -x_1 - 4x_2 + 3x_3 + w_2 = 5, \\ & x_i \ge 0, \ i = 1, 2, 3, \\ & w_i \ge 0, i = 1, 2. \end{aligned}$$

Algoritmus simplexovej metódy

Úloha LP:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

Rovnicový tvar:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax + w = b \\ & x, w \geq 0. \end{aligned}$$

Predpoklady:

1. Rozmer matice spĺňa $m < n$ a $h(A) = m$;
2. vektor na pravej strane ohraničení spĺňa $b \geq 0$.

Základná schéma

1. **Vyplníme počiatočnú simplexovú tabuľku**

$$T(0):\quad \begin{array}{cccc|cccc|c}
x_1 & x_2 & \cdots & x_n & w_1 & w_2 & \cdots & w_m & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_m \\
\hline
c_1 & c_2 & \cdots & c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}$$

Premenné $w_1, \ldots, w_m$ sú **bázické premenné** zodpovedajúce štandardnej báze $e_1, \ldots, e_m$. Príslušné bázické riešenie systému je

$$(x; w)^0 = (0; b)$$

a hodnota účelovej funkcie v tomto bázickom riešení je 0.

2. **Výber stĺpcového indexu.**

- Vyberie sa premenná $x_q \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, ktorá nahradí jednu zo súčasných bázických premenných $w_1, \ldots, w_m$.

- Premenná x_q sa volí tak, aby zvýšenie jej hodnoty garantovalo zvýšenie hodnoty účelovej funkcie, t.j. vyberáme $q \in \{1, ..., n\}$ také, pre ktoré $c_q > 0$.

- Ak platí $c_i \leq 0, \ \forall i = 1, ..., n$, tak zrejme aktuálne bázické riešenie je optimálne.

3. **Výber riadkového indexu.**

- Ak pre $i \neq q$ položíme $x_i = 0$, dostávame zo systému rovníc vyjadrenia:

$$w_j = b_j - a_{jq} x_q \geq 0, \ \forall j = 1, ..., m,$$

z čoho vyplýva, že premenná x_q musí spĺňať $a_{jq} x_q \leq b_j$ pre všetky $j \in \{1, ..., m\}$. Keďže predpokladáme, že $b \geq 0$, tak pre $a_{jq} \leq 0$ sú zrejme nerovnosti splnené a v prípade $a_{jq} > 0$ musí platiť

$$x_q \leq \frac{b_j}{a_{j_q}}.$$

- Hodnotu x_q teda volíme

$$x_q = \frac{b_p}{a_{pq}}, \quad p = \arg\min_j \left\{ \frac{b_j}{a_{j_q}} \mid a_{jq} > 0 \right\}.$$

- V prípade, že je vyššie uvedená množina pre výber indexu p prázdna, úloha je neohraničená.

4. **Nová simplexová tabuľka:**

$T(1)$:

x_1	$\cdots$	x_q	$\cdots$	x_n	w_1	$\cdots$	w_p	$\cdots$	w_m	
$a_{11} - \frac{a_{1q}a_{p1}}{a_{pq}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$a_{1n} - \frac{a_{1q}a_{pn}}{a_{pq}}$	1	$\cdots$	$-\frac{a_{1q}}{a_{pq}}$	$\cdots$	0	$b_1 - \frac{a_{1q}}{a_{pq}}b_p$
$a_{21} - \frac{a_{2q}a_{p1}}{a_{pq}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$a_{2n} - \frac{a_{2q}a_{pn}}{a_{pq}}$	0	$\cdots$	$-\frac{a_{2q}}{a_{pq}}$	$\cdots$	0	$b_2 - \frac{a_{2q}}{a_{pq}}b_p$
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{a_{p1}}{a_{pq}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{a_{pn}}{a_{pq}}$	0	$\cdots$	$\frac{1}{a_{pq}}$	$\cdots$	0	$\frac{1}{a_{pq}}b_p$
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_{n1} - \frac{a_{nq}a_{p1}}{a_{pq}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$a_{nn} - \frac{a_{nq}a_{pn}}{a_{pq}}$	0	$\cdots$	$-\frac{a_{nq}}{a_{pq}}$	$\cdots$	0	$b_n - \frac{a_{nq}}{a_{pq}}b_p$
$c_1 - \frac{a_{p1}}{a_{pq}}c_q$	$\cdots$	0	$\cdots$	$c_n - \frac{a_{pn}}{a_{pq}}c_q$	0	$\cdots$	$-\frac{c_q}{a_{pq}}$	$\cdots$	0	$-\frac{c_q}{a_{pq}}b_p$

S novou simplexovou tabuľkou postupujeme analogicky - vrátime sa na krok 2.

Vo všeobecnosti ak má v k-tej iterácii simplexová tabuľka tvar

$$T(k):\ \begin{array}{ccc|c|cc|c}
a_{11}^k & a_{12}^k & \cdots & a_{1q}^k & \cdots & a_{1,m+n}^k & b_1^k \\
a_{21}^k & a_{22}^k & \cdots & a_{2q}^k & \cdots & a_{2,m+n}^k & b_2^k \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\hline
a_{p1}^k & a_{p2}^k & \cdots & a_{pq}^k & \cdots & a_{p,m+n}^k & b_p^k \\
\hline
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}^k & a_{m2}^k & \cdots & a_{mq}^k & \cdots & a_{m,m+n}^k & b_m^k \\
\hline
c_1^k & c_2^k & \cdots & c_q^k & \cdots & c_{m+n}^k & -z^k
\end{array},$$

pričom tabuľka nie je optimálna a podľa nejakého pravidla sme vybrali stĺpcový index q a riadkoví index p pre pivot, nová tabuľka $T(k+1)$ bude mať prvky nahradené nasledovne:

$$a_{pi}^{k+1} := \frac{a_{pi}^k}{a_{pq}^k},\ i = 1, \ldots, m+n,$$

$$a_{ji}^{k+1} := a_{ji}^k - \frac{a_{jq}^k a_{pi}^k}{a_{pq}^k},\ j \neq p, i = 1, \ldots, m+n.$$

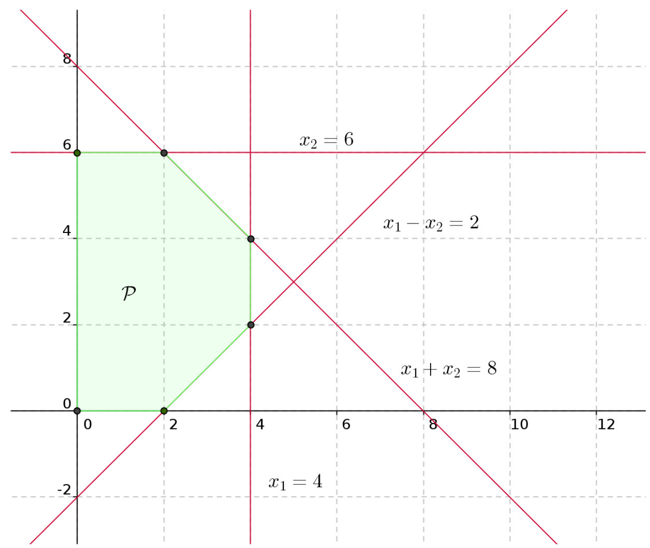
$$c_i^{k+1} := c_i^k - \frac{c_q^k a_{pi}^k}{a_{pq}^k},\ i = 1, \ldots, m+n,$$

$$-z^{k+1} = -z^k - \frac{c_q^k b_p^k}{a_{pq}^k}.$$

Simplexová tabuľka a množina optimálnych riešení

Príklad:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 - x_2 \le 2 \\ & x_1 \le 4 \\ & x_1 + x_2 \le 8 \\ & x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$



$T(0)$:

x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
1	−1	1	0	0	0	2
1	0	0	1	0	0	4
1	1	0	0	1	0	8
0	1	0	0	0	1	6
1	2	0	0	0	0	0

$T(1)$:

x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
1	−1	1	0	0	0	2
0	1	−1	1	0	0	2
0	2	−1	0	1	0	6
0	1	0	0	0	1	6
0	3	−1	0	0	0	−2

$T(2)$:

x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
1	0	0	1	0	0	4
0	1	-1	1	0	0	2
0	0	1	-2	1	0	2
0	0	1	-1	0	1	4
0	0	2	-3	0	0	-8

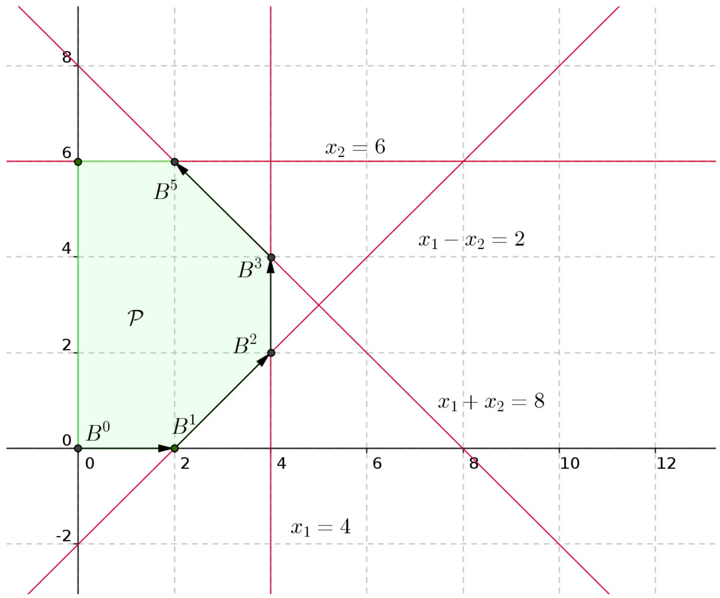
$T(3)$:

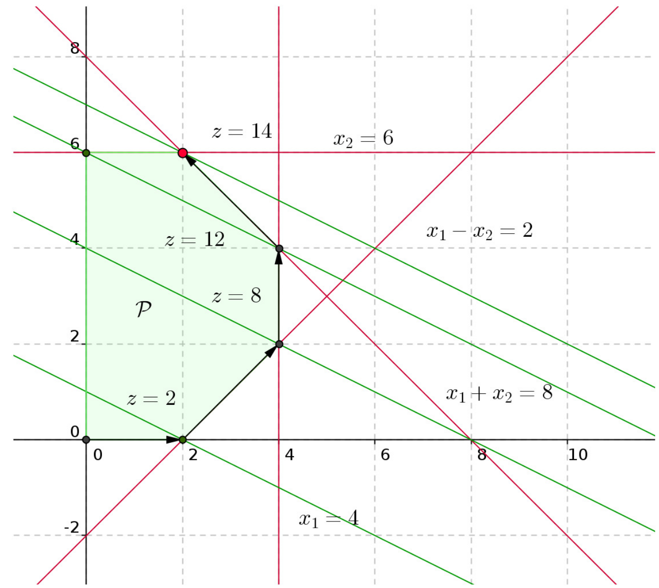
x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
1	0	0	1	0	0	4
0	1	0	-1	1	0	4
0	0	1	-2	1	0	2
0	0	0	1	-1	1	2
0	0	0	1	-2	0	-12

$$T(4): \quad \begin{array}{rr|rrrr|r} x_1 & x_2 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -14 \end{array}$$

Zodpovedajúce bázické riešenia:

$$\begin{aligned} B^2 &= (4, 2; 0, 0, 2, 4) \quad z = 8, \\ B^3 &= (4, 4; 2, 0, 0, 2) \quad z = 12, \\ B^4 &= (2.6; 6, 2, 0, 0) \quad z = 14. \end{aligned}$$





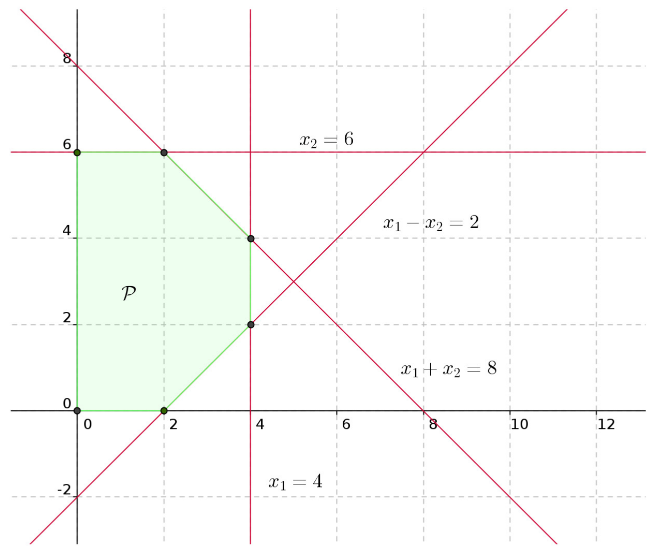
Jediné optimálne riešenie: $(x_1^*, x_2^*) = (2, 6)$

Veta: Ak sú v poslednom riadku optimálnej simplexovej tabuľky hodnoty $\bar{c}_j < 0$, pre indexy j zodpovedajúce nebázickým premenným, tak existuje len jediné optimálne riešenie.

Opačná implikácia neplatí.

Obmena: ak má úloha LP viac optimálnych riešení, tak pre indexy j zodpovedajúce nebázickým premenným nie sú všetky hodnoty $\bar{c}_j < 0$.

Príklad:



$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + x_2 \\
& x_1 - x_2 \leq 2 \\
& x_1 \leq 4 \\
& x_1 + x_2 \leq 8 \\
& x_2 \leq 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

$$T(0): \quad \begin{array}{rr|rrrr|r} x_1 & x_2 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$T(1): \quad \begin{array}{rr|rrrr|r} x_1 & x_2 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & \\ \hline 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ \hline 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}$$

$$
T(2):\quad
\begin{array}{rr|rrrr|r}
x_1 & x_2 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 4 \\
\hline
0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -6
\end{array}
$$

$$
T(3):\quad
\begin{array}{rr|rrrr|r}
x_1 & x_2 & w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -8
\end{array}
$$

- Optimálne bázické riešenie: $(4, 4; 2, 0, 0, 2)$

- Hodnota účelovej funckie vyjadrená pomocou nebázických premenných

$$z = 8 - w_3.$$

- Táto hodnota závisí len od w_3, ktorú nemôžme zvýšiť bez toho aby sme znížili hodnotu účelovej funkcie, avšak nezávisí od hodnoty nebázickej premennej w_2.

- Keď ponecháme $w_3 = 0$, tak z tabuľky $T(3)$ dostávame vyjadrenie:

$$x_1 + w_2 = 4, x_2 - w_2 = 4, w_1 - 2w_2 = 2, w_4 + w_2 = 2.$$

Pre hodnotu $w_2 \in [0, 2]$ zostanú podmienky nezápornosti zachované a hodnota účelovej funkcie sa nemení. Teda množina optimálnych riešení je

$$\{(x_1^*, x_2^*) = (4 - \lambda, 4 + \lambda) \mid \lambda \in [0, 2]\}.$$

Zacyklenie simplexovej metódy

Definícia:
Úloha lineárneho programovania v rovnicovom tvare sa nazýva degenerovaná, ak má aspoň jedno degenerované prípustné bázické riešenie. V opačnom prípade sa nazýva nedegenerovaná.

Veta:
Pre nedegenerované úlohy je základná simplexová metóda konečná.

Anticyklické metódy

- Charnes - 1952 - **perturbačná metóda**

- Dantzig, Orden, Wolfe - 1955 - **lexikografická metóda**

Za predpokladu: $a_j \succeq_{lex} 0$, riadkový index pre pivot:

$$\frac{a_p}{a_{pq}} = \operatorname{lex\,min} \left\{ \frac{a_j}{a_{iq}} \mid a_{jq} > 0 \right\}.$$

- Bland - 1977 - **metóda najmenších indexov.**

Dvojfázová simplexová metóda

- Ak vektor b má nejakú zložku zápornú.

Dvojfázová simplexová metóda rieši tento problém v dvoch fázach:

1. Vyrieši sa **pomocná úloha**, pomocou ktorej buď nájdeme prípustnú simplexovú tabuľku alebo zistíme, že pôvodná úloha je neprípustná.

2. V prípade, že sme našli prípustnú simplexovú tabuľku, doriešime pomocou nej pôvodnú úlohu.

LP úloha:

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax \le b \\ & x \ge 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Spomínaný pomocný problém má nasledujúci tvar

$$\begin{aligned} \min \quad & y \\ & Ax - ye \le b \\ & x, y \ge 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Dá sa ľahko vidieť, že úloha (1) je prípustná práve vtedy, keď pomocná úloha (2) á optimálne riešenie soptimálnou hodnotou 0. Pre praktické použitie sa pomocná úloha transformuje na maximalizačnú.

Príklad:

Daná je úloha

$$\begin{aligned} \max \quad & -2x_1 - x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq -1 \\ & -x_1 - 2x_2 \leq -2 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Pomocná úloha:

$$\begin{aligned} \max \quad & -y \\ & -x_1 + x_2 - y \leq -1 \\ & -x_1 - 2x_2 - y \leq -2 \\ & x_2 - y \leq 1 \\ & x_1, x_2, y \geq 0. \end{aligned}$$

Fáza 1:

x_1	x_2	y	w_1	w_2	w_3	b
-1	1	-1	1	0	0	-1
-1	-2	-1	0	1	0	-2
0	1	-1	0	0	1	1
0	0	-1	0	0	0	0

x_1	x_2	y	w_1	w_2	w_3	b
0	3	0	1	-1	0	1
1	2	1	0	-1	0	2
1	3	0	0	-1	1	3
1	2	0	0	-1	0	2

x_1	x_2	y	w_1	w_2	w_3	b
0	1	0	$1/3$	$-1/3$	0	$1/3$
1	0	1	$-2/3$	$-1/3$	0	$4/3$
1	0	0	-1	0	1	2
1	0	0	$-2/3$	$-1/3$	0	$4/3$

x_1	x_2	y	w_1	w_2	w_3	b
0	1	0	$1/3$	$-1/3$	0	$1/3$
1	0	1	$-2/3$	$-1/3$	0	$4/3$
0	0	-1	$-1/3$	$1/3$	1	$2/3$
0	0	-1	0	0	0	0

Fáza 2:

x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	b
0	1	$1/3$	$-1/3$	0	$1/3$
1	0	$-2/3$	$-1/3$	0	$4/3$
0	0	$-1/3$	$1/3$	1	$2/3$
-2	-1	0	0	0	0

x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	b
0	1	$1/3$	$-1/3$	0	$1/3$
1	0	$-2/3$	$-1/3$	0	$4/3$
0	0	$-1/3$	$1/3$	1	$2/3$
0	0	-1	-1	0	3

Optimálne riešenie duálnej úlohy

Pri simplexovom algoritme získame riadky novej simpelxovej tabuľky $T(k+1)$ ako lineárnu kombináciu riadkov tabuľky $T(k)$.

Matematickou indukciou sa dá ľahko ukázať, že riadky v ľubovoľnej tabuľke $T(k)$ získame ako lineárnu kombináciu riadkov počiatočnej tabuľky $T(0)$.

Špeciálne: riadky v optimálnej tabuľke T^* získame ako lineárnu kombináciu riadkov počiatočnej tabuľky $T(0)$.

$$
T(0):\quad
\begin{array}{cccc|cccc|c}
x_1 & x_2 & \cdots & x_n & w_1 & w_2 & \cdots & w_m & \\
\hline
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_m \\
\hline
c_1 & c_2 & \cdots & c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}
$$

$$
T^*:\quad
\begin{array}{cccc|cccc|c}
x_1 & x_2 & \cdots & x_n & w_1 & w_2 & \cdots & w_m & \\
\hline
\bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{1,n+1} & \bar{a}_{1,n+2} & \cdots & \bar{a}_{1,n+m} & \bar{b}_1 \\
\bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2n} & \bar{a}_{2,n+1} & \bar{a}_{2,n+2} & \cdots & \bar{a}_{2,n+m} & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\bar{a}_{m1} & \bar{a}_{m2} & \cdots & \bar{a}_{mn} & \bar{a}_{m,n+1} & \bar{a}_{m,n+2} & \cdots & \bar{a}_{m,n+m} & \bar{b}_m \\
\hline
\bar{c}_1 & \bar{c}_2 & \cdots & \bar{c}_n & u_1 & u_2 & \cdots & u_m & -z^*
\end{array}
$$

Označme

$$(a^1, e^1, b_1), (a^2, e^2, b_2), ..., (a^m, e^m, b_m), (c^T, 0_m, 0)$$

riadky tabuľky $T(0)$ a $(\bar{c}, u^T, -z^*)$ posledný riadok tabuľky T^*. Tento riadok vznikol ako lineárna kombinaácia riadkov $T(0)$, pričom príslušné koeficienty sú zrejme vektory $u_1, ..., u_m$:

$$(\bar{c}^T, u^T, -z^*) = (c, 0_m, 0) + \sum_{i=1}^{m} u_i(a^i, e^i, b_i).$$

Vyššie uvedený vzťah je ekvivalentný s

$$\bar{c} = c + A^T u,\ b^T u = -z^*.$$

Definujme $y^* := -u \geq 0$. Potom zrejme $c - A^T y^* = \bar{c} \leq 0$ a $b^T y^* = z^*$. Teda $y^* = -u$ je optimálne riešenie duálnej úlohy

$$\begin{aligned} \min\ \ & b^T y \\ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Príklad:

Daná je úloha

$$\begin{array}{ll} \max & 4x_1 + 8x_2 + 6x_3 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 12 \\ & x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 8 \\ & x_i \geq 0, i = 1, 2, 3. \end{array}$$

Túto úlohu budeme riešiť simplexovou metódou:

$$T(0): \quad \begin{array}{ccc|cc|c} x_1 & x_2 & x_3 & w_1 & w_2 & b \\ \hline 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 12 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 1 & 8 \\ \hline 4 & 8 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$T(1): \quad \begin{array}{ccc|cc|r} x_1 & x_2 & x_3 & w_1 & w_2 & b \\ \hline 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 11/2 & -1/2 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 4 & 4 & -2 & 0 & -24 \end{array}$$

$$T(2): \quad \begin{array}{ccc|cc|r} x_1 & x_2 & x_3 & w_1 & w_2 & b \\ \hline 1 & 0 & -9/4 & 3/4 & -1/2 & 5 \\ 0 & 1 & 11/4 & -1/4 & 1/2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -5 & -1 & -2 & -28 \end{array}$$

Optimálne riešenie primárnej úlohy: $x^* = (5, 1, 0)$

Optimálne riešenie duálnej úlohy: $y^* = (1, 2)$

Praktický význam - úlohy s vysokou maticou

Predpokladajme, že máme danú úlohu

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

kde rozmer matice A spĺňa $m >> n$.

Počet iterácii v simplexovej metóde **závisí od počtu riadkov matice.**

Preto je výhodné riešiť duálnu úlohu

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Duálna simplexová metóda

Duálna simplexová metóda bola navrhnutá v r. 1954.

Autori: C.E. Lemke a E.M.L. Beale

Táto metóda skryte využíva duálne vlastnsti medzi úlohami.

Algoritmus je podobný štandardnej (primárnej) simplexovej metóde, avšak parametre c a b majú obrátené úlohy.

Procedúra 1. iterácie duálnej simplexovej metódy:

• Ak $b \geq 0$, tak je tabuľka optimálna. (Tento predpoklad zodpovedá predpokladu $-b \leq 0$, ak by sme riešili duálnu úlohu štandardnou simplexovou metódou.)

• Ak existuje index p taký, že $b_p < 0$, tak
- ak $a_{pj} \geq 0, \ \forall j = 1, \ldots, n$, tak je zrejme úloha neprípustná, - ak existuje index j taký, že $a_{pj} < 0$, tak vyberáme stĺpcový index q podľa pravidla

$$q = \arg\min_j \{ \frac{c_j}{a_{pj}} \mid a_{pj} < 0 \},$$

čo zodpovedá pravidlu pre výber riadkového indexu, ak by sme riešili duálnu úlohu štandardnou simplexovou metódou.

• Máme vybraný pivot a_{pq} - ďalej postupujme pomocou eliminácie, podobne ako v štandardnej simplexovej metóde.

Príklad:

Daná je úloha

$$\begin{aligned} \max \quad & -2x_1 - x_2 \\ & -x_1 + x_2 \le -1 \\ & -x_1 - 2x_2 \le -2 \\ & x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

Duálna úloha k tejto úlohe má po transformácii na maximalizačnú úlohu tvar

$$\begin{aligned} \max \quad & y_1 + 2y_2 - y_3 \\ & -y_1 + y_2 \le 2 \\ & -y_1 + 2y_2 - y_3 \le 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{aligned}$$

Duálna S.M. na pôvodnej úlohe - Štandardná S.M. na duálnej úlohe

$T(0)$:

x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	b
-1	1	1	0	0	-1
-1	-2	0	1	0	-2
0	1	0	0	1	1
-2	-1	0	0	0	0

$DT(0)$:

y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	$-c$
1	1	0	1	0	2
-1	2	1	0	1	1
1	2	-1	0	0	0

$T(1)$:

x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	b
1	-1	-1	0	0	1
0	-3	-1	1	0	-1
0	1	0	0	1	1
0	-3	-2	0	0	2

$DT(1)$:

y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	$-c$
1	1	0	1	0	2
0	3	1	1	1	3
0	1	-1	-1	0	-2

$$T(2): \quad \begin{array}{cc|ccc|c} x_1 & x_2 & w_1 & w_2 & w_3 & b \\ \hline 1 & 0 & -2/3 & -1/3 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 1 & 2/3 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array} \qquad DT(2): \quad \begin{array}{ccc|cc|c} y_1 & y_2 & y_3 & s_1 & s_2 & -c \\ \hline 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -4/3 & -4/3 & -1/3 & -3 \end{array}$$

Optimálne riešenie primárnej úlohy: $x^* = (4/3, 1/3)$

Optimálne riešenie duálnej úlohy: $y^* = (1, 1, 0)$