1 Generátor náhodných kvadratických funkcií

1.1 Kladne definitná matica. Matica G je kladne definitná, ak pre ľubovoľné x platí $x^T G x \geq 0$, pričom rovnosť nastáva len pre $x = 0$. Ukážte, že pre ľubovoľnú maticu A a ľubovoľné $\varepsilon > 0$ je

$$G = AA^T + \varepsilon I,$$

kde I je identická matica, kladne definitná matica.

1.2 Generátor. Naprogramujte generátor náhodných kvadratických funkcií tvaru

$$Q(x) = \frac{1}{2} x^T G x + h^T x,$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$ je vektor premenných, G je náhodne generovaná celočíselná symetrická kladne definitná matica rozmeru $n \times n$ a h je n-rozmerný vektor. Náhodne vygenerujte bod optima x_{opt} tak, aby jeho zložky boli celé čísla medzi -5 a 5. Vektor h dopočítajte tak, aby x_{opt} bol skutočne minimom funkcie $Q(x)$. Ako vyzerá $\nabla Q(x)$ a čo musí platiť v optime?

Funkciu v matlabe definujte ako *anonymous function* príkazom

```
Q = @(x) 1/2*x'*G*x + h'*x;
```

1.3 Dvojrozmerný prípad.

(a) Pre $n = 2$ vykreslite vygenerovanú funkciu Q na ploche $(x_1, x_2) \in [-10, 10]^2$ pomocou funkcie `surf`.
Poznámky
- Miesto `surf(X,Y,Z)` môžete použiť `surf(X,Y,Z,'EdgeColor','none')`, aby vám to nevykresľovalo hrany.
- Mrežu bodov z danej oblasti môžete vytvoriť pomocou `[X,Y] = meshgrid(linspace(-10,10,100))`.

(b) Do nového obrázku vykreslite vrstevnice funkcie Q pomocou funkcie `contour`. V obrázku vyznačte bod minima x_{opt}.

(c) Nájdite minimum vygenerovanej funkcie Q pomocou `fminsearch`, porovnajte to so skutočným minimom x_{opt} a odmerajte, ako dlho výpočet trval pomocou `tic` a `toc`. Ako štartovací bod pre `fminsearch` môžete použiť nulu (`zeros(n,1)`).

Pravidlá vektorového derivovania

Vektorovému derivovaniu je venovaný Dodatok B v knihe (strana 273). Tu uvádzame len vybrané pravidlá derivovania.

Nech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Symbolom $\frac{df(x)}{dx}$ označujeme **riadkový** vektor

$$\frac{df(x)}{dx} = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)$$

a symbolom $\nabla f(x) = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^T$ označujeme **stĺpcový** vektor gradientu funkcie f.

Derivácia skalárneho súčinu

Nech

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \ \ v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \ \ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

pričom $f(x) = u(x)^T v(x)$. Potom

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\Big[u(x)^T v(x)\Big] = u(x)^T \frac{dv(x)}{dx} + v(x)^T \frac{du(x)}{dx},$$

$$\nabla f(x) = \left(\frac{df(x)}{dx}\right)^T = \nabla v(x)\ u(x) + \nabla u(x)\ v(x).$$

Domáca úloha

1.4 Úprava účelovej funkcie. *[3 body]* Ukážte, že účelová funkcia pre odhad parametrov logistickej regresie

$$J(x) = -\sum_{i=1}^{m} v^i \ln\left(g\left(x^T u^i\right)\right) + (1 - v^i) \ln\left(1 - g\left(x^T u^i\right)\right),$$

kde g je logistická funkcia $g(z) = 1/(1 + e^{-z})$, sa dá upraviť na tvar

$$J(x) = \sum_{i=1}^{m} (1 - v^i)\, x^T u^i + \ln\left(1 + e^{-x^T u^i}\right).$$

1.5 Načítanie dát. *[2 body]* Načítajte dáta zo súboru *data.csv* pomocou funkcie `csvread` a vykreslite závislosť pohlavia od výšky (teda body (u_1^i, v^i)).
Do spoločného obrázka vykreslite histogramy výšky mužov a žien.

1.6 Nájdenie optima. *[3 body]* Definujte účelovú funkciu $J(x)$ ako funkciu premennej x pomocou tzv. *anonymous function*, t.j. ako `J = @(x) ...`
Nájdite optimálne hodnoty parametrov $x \in \mathbb{R}^2$, teda minimalizujte funkciu J pomocou matlabovského solveru `fminsearch` s nulovým štartovacím bodom.
Aké sú pravdepodobnosti toho, že študenti s výškami 160 cm, 170 cm, 180 cm a 190 cm sú muži?

1.7 Obrázok. *[2 body]* Vykreslite funkciu pravdepodobnosti toho, že študent je muž, v závislosti od výšky u_1, teda logistickú funkciu $g\left(x^T u\right)$ s dosadenými optimálnymi hodnotami parametrov x ako funkciu premennej u_1.
Do toho istého obrázka zakreslite aj pôvodné dáta (body (u_1^i, v^i)).