3 Metódy bodovej aproximácie minima funkcie jednej premennej (Interpolačné metódy)

3.1 Testovanie metód. Použite súbory a testujte

`newton.m`	–	Newtonovu metódu,
`kvadint.m`	–	metódu kvadratickej interpolácie s dvomi interpolačnými uzlami a so zadanými hodnotami $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$, $f_1' = f'(x_1) < 0$

na funkciách

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 3x, & I_1 &= (0,\ 1),\\ f_2(x) &= -5x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 11x^2 - 2x, & I_2 &= (-1/2,\ 1/2),\\ f_3(x) &= \ln^2(x-2) + \ln^2(10-x) - x^{0.2}, & I_3 &= (8,\ 9.5),\\ f_4(x) &= -3x\sin(0.7x) + e^{-2x}, & I_4 &= (0,\ 2\pi),\\ f_5(x) &= e^{3x} + 5e^{-2x}, & I_5 &= (0,\ 1). \end{aligned}$$

3.2 Kvadratická interpolácia. Naprogramujte ďalšie varianty metódy kvadratickej interpolácie a testujte ich na vyššie uvedených funkciách.

3.3 Interpolácia konvexnou funkciou. Uvažujme funkciu jednej premennej $f(x)$ definovanú pre kladné x. Zadané sú dva interpolačné uzly $0 < x_1 < x_2$, funkčné hodnoty $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$ a hodnota derivácie $f_1' = f'(x_1) < 0$. Pre $f_{12} := \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$ predpokladáme platnosť $f_{12} > f_1'$. Interpolačná funkcia má tvar

$$\varphi(x) = ax + b - c\ln(x),$$

kde $a, c > 0$ a $b \in \mathbb{R}$.

(a) Odvoďte interpolačnú formulu pre minimum $\hat{x}$.

(b) Ukážte, že platí $\hat{x} > x_1$.

(c) Naprogramujte interpoláciu funkciou $\varphi(x)$ a testujte ju na vyššie uvedených funkciách.

3.4 Interpolácia stredovým splajnom. Naprogramujte metódu interpolácie stredovým kvadratickým splajnom a testujte ju na vyššie uvedených funkciách.

3.5 Grafické porovnanie metód. Naprogramujte grafický výstup porovnávania konvergencie metód pre zvolenú funkciu - vykreslite graf, ktorý má na x-ovej osi hodnoty k (iterácie) a na y-ovej osi hodnotu $|f(x^k) - f^*|$, kde x^k je aproximácia minima v k-tej iterácii a f^* je hodnota funkcie vo výslednom ε-presom riešení.

Poznámka: Pre lepšiu prehľadnosť môže byť výhodné na osi y použiť logaritmickú mierku. Takýto graf vykreslíte tak, že miesto `plot(x,y)` použijete `semilogy(x,y)`. Kvôli logaritmickej transformácii budú vykreslené iba kladné zložky vektora y.

Domáca úloha

V tejto domácej úlohe zafixujeme jeden z parametrov logistickej regresie a budeme hľadať druhý. Konkrétne pre dvojicu $x = (x_0, x_1)^T \in \mathbb{R}^2$ povieme, že $x_0 = -30$ a budeme hľadať optimálnu hodnotu x_1. Riešime teda jednorozmerný optimalizačný problém

$$\text{Min}\left\{ J(x) = \sum_{i=1}^{m} (1 - v^i)\, x^T u^i + \ln\left(1 + e^{-x^T u^i}\right) \,\middle|\, x_0 = -30,\ x_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

3.6 Účelová funkcia a derivácia. *[2 body]* Napíšte, ako vyzerá účelová funkcia $J_1(x_1) = J\left((-30, x_1)^T\right)$ a vykreslite ju na intervale $(0, 50)$.
Vyjadrite prvú deriváciu účelovej funkcie $J_1'(x_1)$.

3.7 Kvadratická interpolácia. *[2 body]* Použite metódu kvadratickej interpolácie s dvomi interpolačnými uzlami a, b a so zadanými hodnotami $f_a' = f'(a) < 0$ a $f_b' = f'(b) > 0$ na nájdenie optimálnej hodnoty x_1, t.j. minimalizujte $J_1(x_1)$ na intervale $(0, 50)$. Ako kritérium optimality použite $\left|J'(x_1^k)\right| \leq \varepsilon = 10^{-5}$.

3.8 Interpolácia konvexnou funkciou.*[2 body]* Rovnakú úlohu ako v predchádzajúcom príklade riešte pomocou, funkcie jednej premennej $f(x)$ definovanú pre kladné x. Zadané sú dva interpolačné uzly $0 < x_1 < x_2$, funkčné hodnoty $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$ a hodnota derivácie $f_1' = f'(x_1) < 0$. Pre $f_{12} := \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$ predpokladáme platnosť $f_{12} > f_1'$. Interpolačná funkcia má tvar

$$\varphi(x) = ax + b - 2c\sqrt{x},$$

kde $a, c > 0$ a $b \in \mathbb{R}$.

(a) Odvoďte interpolačnú formulu pre minimum $\hat{x}$.

(b) Naprogramujte interpoláciu funkciou $\varphi(x)$. Ako kritérium optimality použite $\left|J'(x_1^k)\right| \leq \varepsilon = 10^{-5}$.

3.9 Porovnanie metód. *[2 body]* Porovnajte nájdené riešenia, potrebný počet iterácií a trvanie výpočtu pre kvadratickú interpoláciu a interpoláciu stredovým kvadratickým splajnom.

3.10 Obrázok. *[2 body]* Vykreslite výslednú funkciu pravdepodobnosti toho, že študent je muž, v závislosti od výšky u_1, teda logistickú funkciu $g\left(x^T u\right)$ s dosadenou optimálnou hodnotou parametra x_1 ako funkciu premennej u_1.
Do toho istého obrázka zakreslite aj funkciu pravdepodobnosti z prvej domácej úlohy a pôvodné dáta (body (u_1^i, v^i)). Čo pozorujete na obrázku?