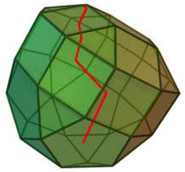
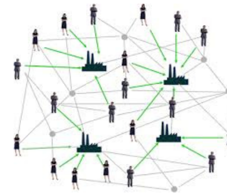
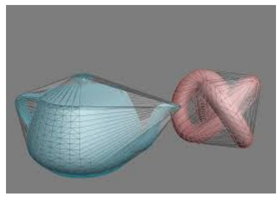
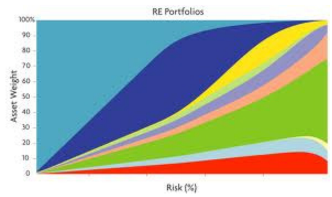
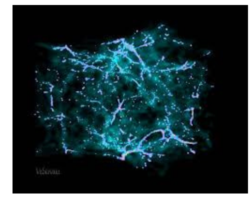
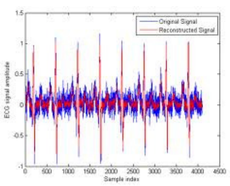


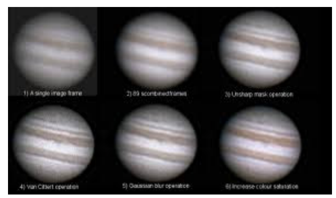


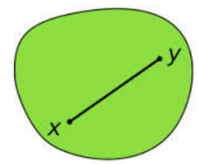






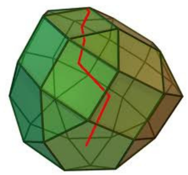


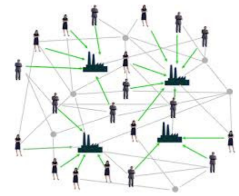
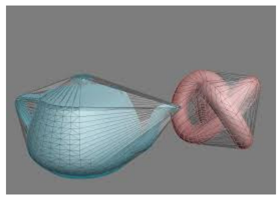
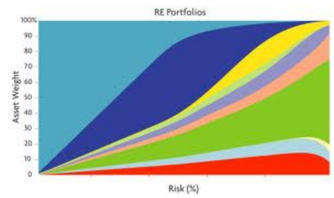


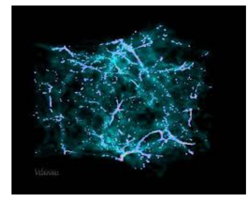
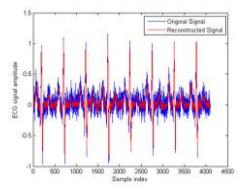


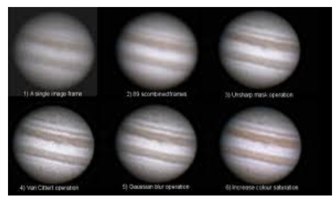
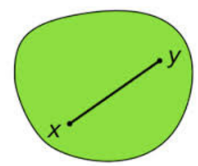
Konvexná optimalizácia - letný semester 2020

M. Trnovská, KAMŠ, FMFI UK



Téma 2: Zovšeobecnenie konvexných úloh

Úloha **konvexného programovania v štandardnom tvare** (úloha konvexného programovania v užšom zmysle)

$$
\begin{array}{ll}
\min & f_0(x), \\
 & f_i(x) \le 0, \;\; i = 1, \ldots, m, \\
 & Ax = b,
\end{array} \tag{1}
$$

Úloha konvexného programovania v širšom zmysle

$$
\begin{array}{ll}
\min & f_0(x) \\
 & x \in \mathcal{C},
\end{array} \tag{2}
$$

kde $f_0(x)$ je konvexná funkcia a $\mathcal{C}$ je nejaká konvexná množina.

- Každá úloha tvaru (1) má tvar úlohy (2), keďže príslušná množina prípustných riešení $\mathcal{P}$ je konvexná.

- Nie každá úloha tvaru (2) sa dá vyjadriť v tvare (1), ako to ukazuje nasledujúci príklad.

Príklad: Uvažujme množinu 2×2 symetrických kladne semidefinitných matíc:

$$\mathcal{C} = \mathcal{S}^2_+ = \{X \in M_{2,2}(\mathbb{R}), X = X^T, X \succeq 0\},$$

ktorá je zrejme konvexná (overte). Máme danú úlohu

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(X) \\ & X \in \mathcal{S}^2_+, \\ & +\text{lineárne ohraničenia.} \end{array} \tag{3}$$

Každej symetrickej 2×2 matici možno jednoznačne priradiť trojrozmerný vektor:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

Kladnú semidefinitnosť symetrickej matice X možno charakterizovať podmienkami $x_1 \geq 0, x_3 \geq 0$ a $\det(X) \geq 0$.

Úlohu (3) by sme mohli ekvivalentne prepísať ako

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(x_1, x_2, x_3) \\ & x_2^2 - x_1 x_3 \leq 0, \\ & x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, \\ & +\text{lineárne ohraničenia.} \end{array}$$

Dá sa však ľahko overiť, že funkcia

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 - x_1 x_3$$

v ohraničeniach nie je konvexná.

Príklad:

Uvažujme úlohu optimalizácie portfólia, kde je daná kladne definitná kovariančná matica výnosov Σ, vektor priemerných výnosov p a minimálny akceptovateľný výnos portfólia r_{min}. Premennou je vektor x, ktorého zložka x_i predstavuje relatívne množstvo aktíva i. Úlohou je minimalizovať varianciu portfólia $x^T \Sigma x$ (ktorá predstavuje mieru rizika):

$$\begin{array}{ll} \min & x^T \Sigma x \\ & p^T x \geq r_{min}, \\ & \Sigma_{i=1}^n x_i = 1, x \geq 0, \end{array}$$

Takáto úloha je úlohou (kvadratického) konvexného programovania v užšom zmysle.

Príklad:

Alternatívne by však daným vstupom do úlohy mohlo byť dané portfólio x a čiastková informácia o kovariančnej matici Σ ukrytá v symetrických maticiach L, U. Zaujímať nás bude najhoršie možné "riziko" pre dané portfólio v rámci našich ohtaničení. To vedie na úlohu s maticovou premennou Σ:

$$\begin{array}{ll} \max & x^T \Sigma x, \\ & L_{ij} \leq \Sigma_{ij} \leq U_{ij}, i, j = 1, \ldots, n, \\ & \Sigma \succeq 0. \end{array}$$

Všimnime si, že účelová funkcia v tejto úlohe je lineárna, $x^T \Sigma x = tr(\Sigma x x^T)$ a množinou prípustných riešení je prienik konvexnej množiny kladne semidefinitných matíc s boxom určeným maticami L a U.

Úloha kónického lineárneho programovania (KLP)

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x, \\ & Ax = b, \\ & x \in K, \end{aligned} \tag{4}$$

kde K je nejaký konvexný kužeľ.

Úloha (4) sa dá chápať ako zovšeobecnenie úlohy lineárneho programovania, ktoré je zrejme podriedou takýchto úloh pre voľbu $K = \mathbb{R}^n_+$.

Konvexný kužeľ

Množina K sa nazýva **konvexný kužeľ**, ak súčasne platí

(k1) $\forall x \in K,\ \forall \alpha \geq 0:\ \alpha x \in K$;

(k2) $\forall x, y \in K:\ x + y \in K$.

Vlastnosti (k1), (k2) z vyššie uvedenej definície sú ekvivalentné s vlastnosťou

(k3) $\forall x, y \in K,\ \forall \alpha, \beta \geq 0:\ \alpha x + \beta y \in K$.

Bod x nazveme **vnútorným bodom** kužeľa $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ak

$$\forall v \in \mathbb{R}^n,\ \exists \varepsilon > 0 :\ x + \varepsilon v \in K.$$

Množinu všetkých vnútorných bodov kužeľa K budeme označovať $intK$.

Množina $intK$ má nasledovné vlastnosti:

(k1') $\forall x \in intK,\ \forall \alpha > 0 :\ \alpha x \in intK$;

(k2') $\forall x, y \in intK :\ x + y \in intK$.

Zachovávajúce operácie:

- Ak K_1, K_2 sú konvexné kužele, tak ich karteziánsky súčin $K_1 \times K_2$ je konvexný kužeľ.

- Ak $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ sú konvexné kužele, tak ich Minkovského súčet $K_1 + K_2$ je konvexný kužeľ.

- Ak K je konvexný kužeľ a $\mathcal{A}$ je lineárne zobrazenie, tak $\mathcal{A}(K)$ je konvexný kužeľ.

- Ak $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ sú konvexné kužele, tak ich prienik $K_1 \cap K_2$ je konvexný kužeľ.

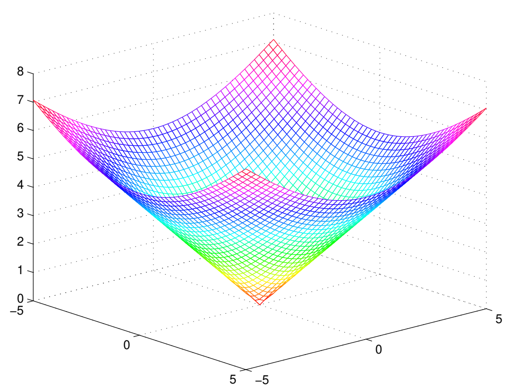
Príklady konvexných kužeľov

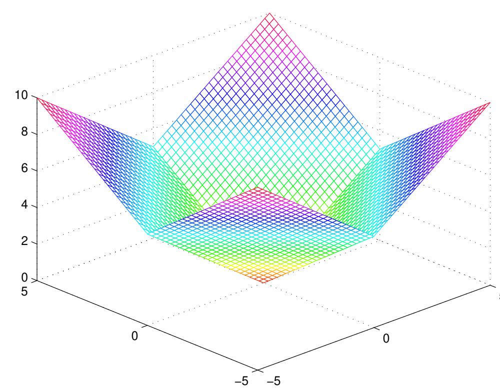
Normový kužeľ:

$$K_{\|.\|} = \{(x, x_0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid \|x\| \leq x_0\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Z vlastností normy vyplýva, že takto definovaná množina je konvexný kužeľ. Špeciálne pre Euklidovskú normu l_2 získame tzv. kužeľ 2. rádu:

$$K_2 = \{(x, x_0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid \|x\|_2 \leq x_0\} \subset \mathbb{R}^n.$$





Kužeľ (symetrických) kladne semidefinitných ($\mathcal{S}_+^n$), kopozitívnych ($\mathcal{C}_+^n$) a kompletne pozitívnych ($\mathcal{P}_+^n$) matíc:

$$\mathcal{S}_+^n = \{X \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid X = X^T,\ z^T X z \geq 0,\ \forall z\},$$

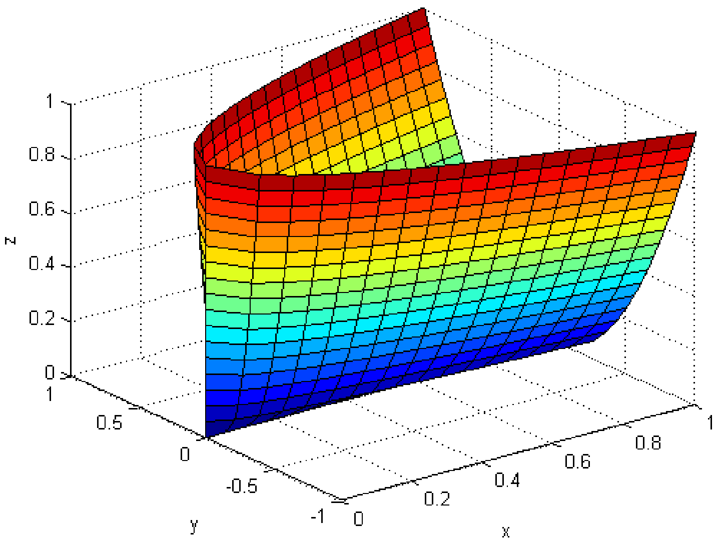
$$\mathcal{C}_+^n = \{X \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid X = X^T,\ z^T X z \geq 0,\ \forall z \geq 0\}$$

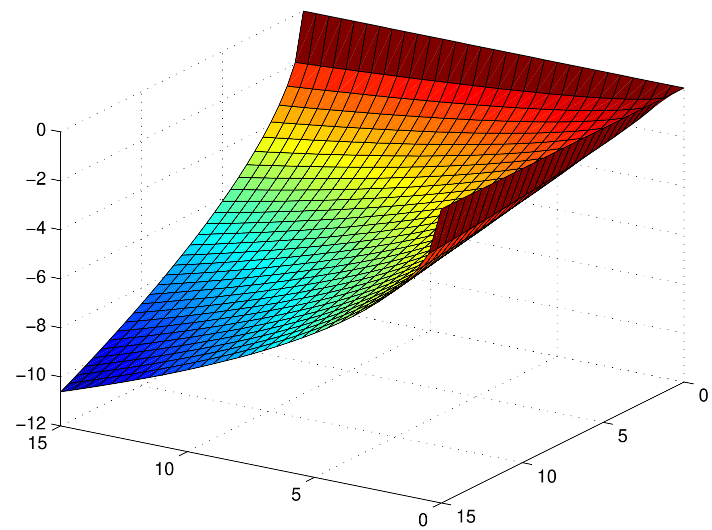
a

$$\mathcal{P}_+^n = \{X \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \mid X = BB^T,\ B_{ij} \geq 0\ \forall i, j\}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{l} b_i b_i^T \mid b_i \in \mathbb{R}_+^n,\ l \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zrejme platí: $\mathcal{P}_+^n \subseteq \mathcal{S}_+^n \subseteq \mathcal{C}_+^n$.


z
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
y
1
0.5
0
-0.5
-1
x
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


0
−2
−4
−6
−8
−10
−12
15
10
5
0
0
5
10
15

Monotónny nezáporný kužeľ:

$$K_{m+} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \geq 0\},$$

t.j. kužeľ nezáporných vektorov s usporiadanými zložkami.

Kužeľ Euklidovských matíc. Symetrická matica $D \in \mathcal{S}^n$ sa nazýva Euklidovská, ak existujú body $x_1, \dots, x_n$ také, že $D_{ij} = \|x_i - x_j\|_2^2$. Zrejme $D_{ij} \geq 0, D_{ii} = 0$. Známy výsledok hovorí, že matica D je euklidovská práve vtedy, keď $D_{ii} = 0$ a $z^T D z \leq 0,\ \forall z : \Sigma_{i=1}^n z_i = 0$, inak povedané D má na diagonále nuly a je záporne semidefinitná na podpriestore $[\mathbf{1}]^\perp$.

Maskovanie štandardných konvexných úloh do tvaru KLP

V nasledujúcom si ukážeme, ako možno úlohu tvaru (1), t.j. úlohu

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(x) \\ & f_i(x) \leq 0, \ i = 1, \dots, m, \\ & Ax = b, \end{array}$$

previesť na tvar úlohy (4), konkrétne na nasleduúcu KLP úlohu:

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ & (x, t, s) \in K_{\mathcal{F}}, \\ & Ax = b, s = 1, \end{array}$$

kde kužeľ $K_{\mathcal{F}}$ je definovaný predpisom (5) pre $C = \mathcal{F}$,

$$\mathcal{F} = \{(x, t) \mid f_0(x) \leq t, \ f_i(x) \leq 0, \ i = 1, \dots, m\}$$

Vnorenie konvexnej množiny do konvexného kužeľa

Každú konvexnú množinu $C \in \mathbb{R}^n$ možno vnoriť do konvexného kužeľa

$$K_C = \left\{(x,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid s > 0, \frac{x}{s} \in C\} \cup \{0\right\}. \tag{5}$$

Zrejme platí $x \in C$ práve vtedy, keď $(x,1) \in K_C$.

Tvrdenie:

Množina K_C definovaná vzťahom (5) je konvexný kužeľ.

Dôkaz:

....

Úloha programovania nad kužeľmi 2. rádu (SOCP)

Keď v úlohe (4) zvolíme za kužeľ K normový kužeľ 2. rádu K_2, dostaneme tzv. úlohu programovania nad kužeľmi 2. rádu (v anglickej literatúre označovanej skratkou SOCP) v štandardnom tvare:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & Ax = b, \\ & \|\bar{x}\|_2 \leq x_0, \\ & x = (\bar{x}; x_0) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}. \end{array} \tag{6}$$

Niekedy sa zvykne formulovať úloha SOCP aj v tzv. duálnom tvare:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ & \|Fx + g\|_2 \leq h^T x + \gamma. \end{array} \tag{7}$$

Úloha semidefinitného programovania (SDP)

Dané sú symetrické matice $C, A_1, ..., A_m$. Úlohou semidefinitného programovania s premennóu $X \in \mathcal{S}^n$ v štandardnom tvare je úloha

$$\begin{array}{ll} \min & \mathsf{tr}(CX) \\ & \mathsf{tr}(A_i X) = b_i, \ i = 1, ..., m, \\ & X \succeq 0. \end{array} \tag{8}$$

Ukážeme, že úloha SDP je naozaj úloha v tvare (4). Vezmime lineárne zobrazenie $svec : \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$$svec(X) = (x_{11}, \sqrt{2}x_{12}, .., \sqrt{2}x_{1n}, x_{22}, \sqrt{2}x_{23}, ..., x_{nn})^T,$$

ktoré zobrazuje $\mathcal{S}^n$ na priestor $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ s rovnakou dimenziou (je izomorfizmom medzi priestromi $\mathcal{S}^n$ a $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$).

Zrejme pre $X, Y \in \mathcal{S}^n$ platí

$$\mathrm{tr}(XY) = svec(X)^T svec(Y).$$

Ak teda definujeme

$\mathbf{x} = svec(X)$, $\mathbf{c} = svec(C)$, $\mathbf{a_i} = svec(A_i),\ i = 1, .., m$,
maticu $\mathbf{A}$ rozmeru $m \times \frac{n(n+1)}{2}$ s riadkovým priestorom $S(\mathbf{A}^T) = span[\mathbf{a_1}, .., \mathbf{a_m}]$
kužeľ $\mathbf{K} = svec(\mathcal{S}^n_+)$,

tak úlohu (8) vieme ekvivalentne prepísať ako

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = b, \\ & \mathbf{x} \in \mathbf{K}. \end{array}$$

Niekedy sa zvykne formulovať úloha SDP aj v tzv. duálnom tvare:

$$\begin{array}{ll} \min & b^T y \\ & C - \Sigma_{i=1}^{m} A_i y_i \succeq 0,\ i = 1, ..., m, \end{array} \tag{9}$$

ktorá sa dá ekvivalentne prepísať ako

$$\begin{array}{ll} \min & b^T y \\ & \mathbf{c} - \mathbf{A}^T y \in \mathbf{K}. \end{array}$$

Ohraničenie v úlohe (9) sa v anglickej literatúre zvykne označovať ako LMI (linear matrix inequality).