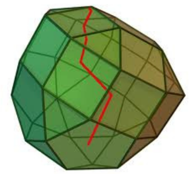
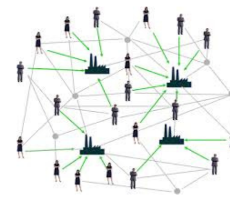
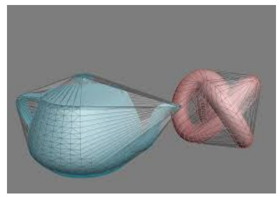
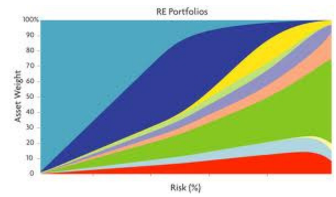
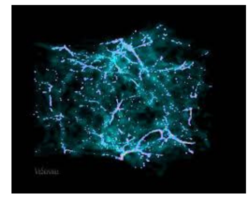
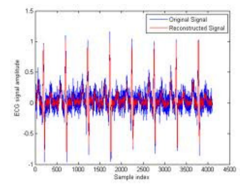


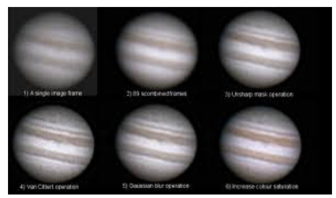


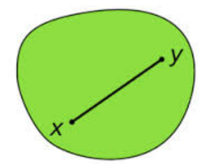






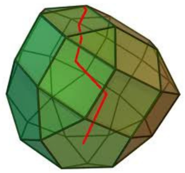


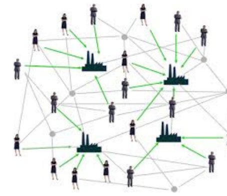


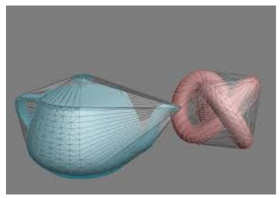


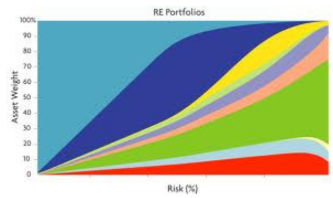
Konvexná optimalizácia - letný semester 2020

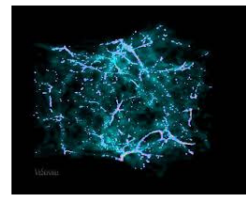
M. Trnovská, KAMŠ, FMFI UK

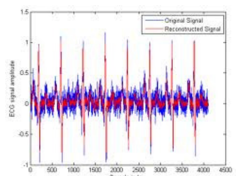


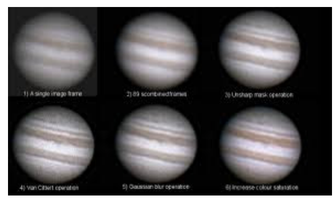


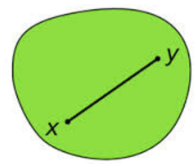












Téma 3: Niečo z teórie matíc

Schurov doplnok

Nech $M = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$ je bloková štvorcová matica, P, S sú štvorcové podmatice a P je regulárna. Potom **Schurovym doplnkom** podmatice P v M je matica

$$M/P = S - RP^{-1}Q. \tag{1}$$

Špeciálne, ak M je **symetrická**, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$, A je regulárna podmatica, tak môžeme definovať $M/A = C - B^T A^{-1} B$.

Tvrdenie:
Pre blokovú maticu M a jej Schurov doplnok platí:

$$\det M = \det P \det M/P.$$

Dôkaz:
....

Dôsledok:
Matica M je singulárna (regulárna) práve vtedy, keď matica M/P je singulárna (regulárna).

Veta:

Daná je bloková symetrická matica $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$, **s regulárnou podmaticou** A. Potom platí

a) M je kladne definitná práve vtedy, keď matice $A, M/A$ sú kladne definitné.

b) M je kladne semidefinitná práve vtedy, keď matice $A, M/A$ sú kladne semidefinitné.

Dôkaz:

....

Algoritmus na testovanie kladnej definitnosti.

1. Overíme, či diagonálne prvky matice M sú kladné.

2. Ak NIE, tak M nie je kladne definitná;
   Ak ÁNO, nájdeme Schurov doplnok

$$M/m_{11} = \begin{pmatrix} m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix} - \frac{1}{m_{11}} \begin{pmatrix} m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{21} \\ \vdots \\ m_{n1} \end{pmatrix}^T$$

3. $M := M/m_{11}$, späť na 1.

Moore-Penroseho inverzia

(Algebraická charakterizácia, Penrose, 1956)

Nech $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Moore-Penroseho (pseudo)-inverziou matice A nazývame maticu $A^\dagger$, spĺňajúcu nasledujúce axiómy:

$$\begin{array}{ll} (P1)\ AA^\dagger A = A; & (P3)\ (AA^\dagger)^T = AA^\dagger; \\ (P2)\ A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger; & (P4)\ (A^\dagger A)^T = A^\dagger A. \end{array}$$

Tvrdenie:

Matica $A^\dagger$ z predchádzajúcej definície je jednoznačne určená.

Dôkaz:

....

- Moore-Penroseho inverzia pre diagonálne matice - ľahké.

- Pre symetrickú maticu so spektrálnym rozkladom $A = Q\Lambda Q^T$ platí $A^\dagger = Q\Lambda^\dagger Q^T$.

- Pre obdĺžnikovú maticu s SVD rozkladom $A = U\Sigma V^T$ platí $A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^T$.

(Konštruktívna charakterizácia)

Pre Moore-Penroseho inverziu platí

$$A^\dagger = \lim_{\varepsilon \to 0+} (A^T A + \varepsilon I)^{-1} A^T,$$

resp. ako

$$A^\dagger = \lim_{\varepsilon \to 0+} A^T (A A^T + \varepsilon I)^{-1}.$$

Dôkaz:

....

Zovšeobecnenie Schurovho doplnku

Daná je bloková symetrická matica

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}.$$

Zovšeobecneným Schurovým doplnkom podmatice A v symetrickej matici M nazývame maticu

$$M/A = C - B^T A^\dagger B.$$

Lema:

Pre matice A, B vhodných rozmerov sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné:

(i) $\mathcal{S}(B) \subseteq \mathcal{S}(A)$;

(ii) $B = AY$ pre nejakú maticu Y;

(iii) $(I - AA^{\dagger})B = 0$.

Dôkaz:

....

Veta:

Daná je bloková symetrická matica $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$.Potom platí, že M je kladne semidefinitná práve vtedy, keď matice $A, M/A$ sú kladne semidefinitné a $\mathcal{S}(B) \subseteq \mathcal{S}(A)$.

Formálne teda

$$M \succeq 0 \Leftrightarrow A \succeq 0, M/A \succeq 0, \mathcal{S}(B) \subseteq \mathcal{S}(A).$$

Dôkaz:

....