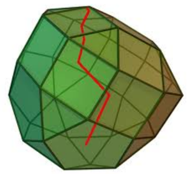
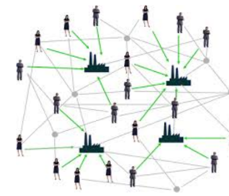
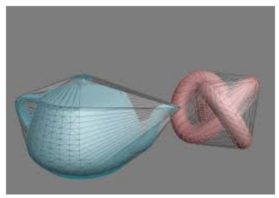
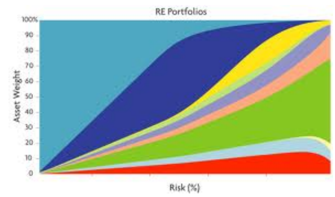
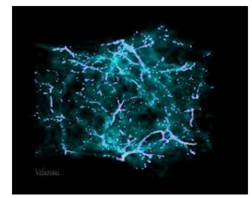
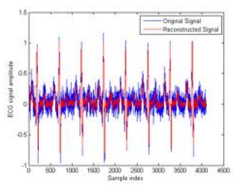


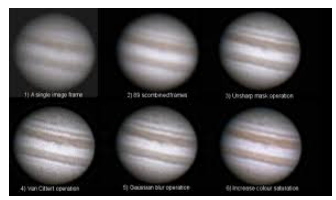


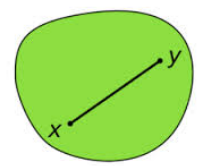






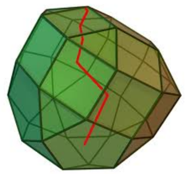


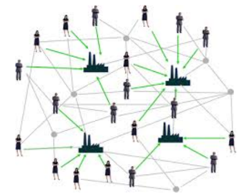


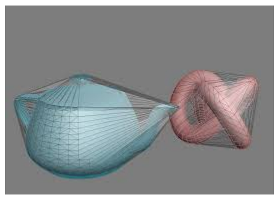


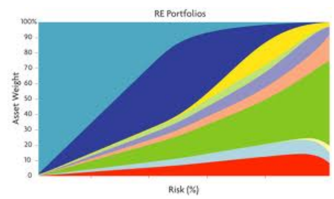
Konvexná optimalizácia - letný semester 2018

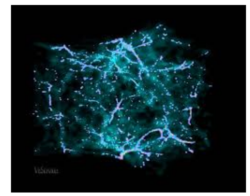
M. Trnovská, KAMŠ, FMFI UK

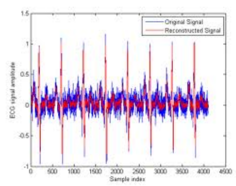


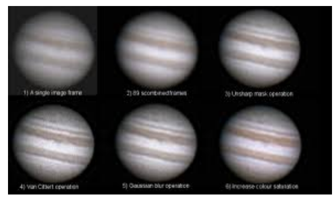


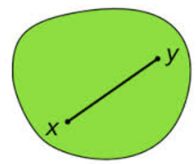












Téma 5: Geometria konvexných kužeľov

Vlastný kužeľ a indukované usporiadania

Kužeľ $K \subseteq \mathbb{R}^n$ sa nazýva **vlastný** (angl. proper cone), ak je

1. konvexný;
2. uzavretý;
3. plný, t. j. $intK \neq \emptyset$;
4. špicatý, t. j. neobsahuje priamku

(ekvivalentne $x \in K, -x \in K \Rightarrow x = 0$).

Každý vlastný kužeľ indukuje tzv. zovšeobecnenú nerovnosť, definovanú ako

$$x \succeq_K y \;\Leftrightarrow\; x - y \in K. \qquad (1)$$

Pomocou nerovnosti (1) môžeme vlastnosť $x \in K$ ekvivalentne zapísať ako $x \succeq_K 0$.

Nerovnosť $\succeq_K$ definovaná v (1) je **čiastočným usporiadaním**, t. j. je to relácia

a) reflexívna: $x \succeq_K x, \ \forall x$;
b) antisymetrická: ak $x \succeq_K y$ a $y \succeq_K x$, tak $x = y$;
c) tranzitívna: ak $x \succeq_K y$ a $y \succeq_K z$, tak $x \succeq_K z$.

Navyše má vlastnosti:

d) ak $x \succeq_K y$ a $z \succeq_K w$, tak $x + z \succeq_K y + w$;
e) ak $x \succeq_K y$ a $\alpha \geq 0$, tak $\alpha x \succeq_K \alpha y$;
f) ak $x_i \succeq_K y_i, \ i = 1, 2, ...$ a $\lim_{i\to\infty} x_i = x$, $\lim_{i\to\infty} y_i = y$, tak $x \succeq y$.

Vlastný kužeľ K tiež indukuje **ostrú zovšeobecnenú nerovnosť** definovanú ako

$$x \succ_K y \;\Leftrightarrow\; x - y \in intK. \tag{2}$$

Nerovnosť $\succ_K$ definovaná v (2) je **ostrým čiastočným usporiadaním**, t. j. je to relácia

a) areflexívna: $x \not\succ_K x,\ \forall x$;
b) tranzitívna: ak $x \succ_K y$ a $y \succ_K z$, tak $x \succ_K z$.

Navyše má vlastnosti:

c) ak $x \succ_K y$, tak $x \succeq_K y$;
d) ak $x \succ_K y$ a $z \succ_K w$, tak $x + z \succ_K y + w$;
e) ak $x \succ_K y$ a $\alpha > 0$, tak $\alpha x \succ_K \alpha y$;
f) ak $x \succ_K y$, tak pre ľubovoľné smery u, v existuje $\varepsilon > 0$, tak, že platí $x + \varepsilon u \succ_K y + \varepsilon v$.

Príklady vlastných kužeľov

- Nezáporný ortant;

- Normový kužeľ;

- Kužeľ kladne semidefinitných matíc;

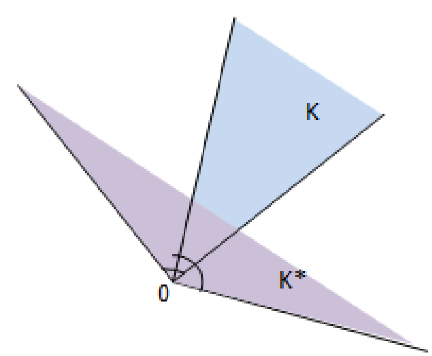
- Kužeľ kopozitívnych matíc

Duálny kužeľ

Nech K je kužeľ (nie nutne konvexný, t. j. je to množina charakterizovaná vlastnosťou (k1) z Definície konvexného kužeľa). Množinu

$$K^* = \{y \mid y^T x \geq 0 \ \forall x \in K\}$$

nazývame duálny kužeľ kužeľa K.



Duálny kužeľ

Tvrdenie:

Nech K^* je duálny kužeľ kužeľa K. Potom

a) K^* je uzavretý konvexný kužeľ.

b) Ak $K_1 \subseteq K_2$, tak $K_2^* \subseteq K_1^*$.

c) $int K^* = \{y \mid y^T x > 0 \ \forall 0 \neq x \in K\}$.

d) Ak K je plný ($int K \neq \emptyset$), tak K^* je špicatý.

e) Ak K je uzavretý a špicatý, tak K^* je plný ($int K^* \neq \emptyset$).

f) Ak K je uzavretý, tak $K^{**} = K$.

Dôsledok: Kužeľ K je vlastný práve vtedy keď K^* je vlastný.

Duálny kužeľ

Kužeľ K sa nazýva **samoduálny**, ak platí $K = K^*$.

Tvrdenie: Ak K je samoduálny, tak musí byť vlastný. (Naopak to však neplatí).

Samoduálne kužele:
Nezáporný ortant;
Normový kužeľ;
Kužeľ kladne semidefinitných matíc;

Kužele kopozitívnych a kompletne pozitívnych matíc sú navzájom duálne.