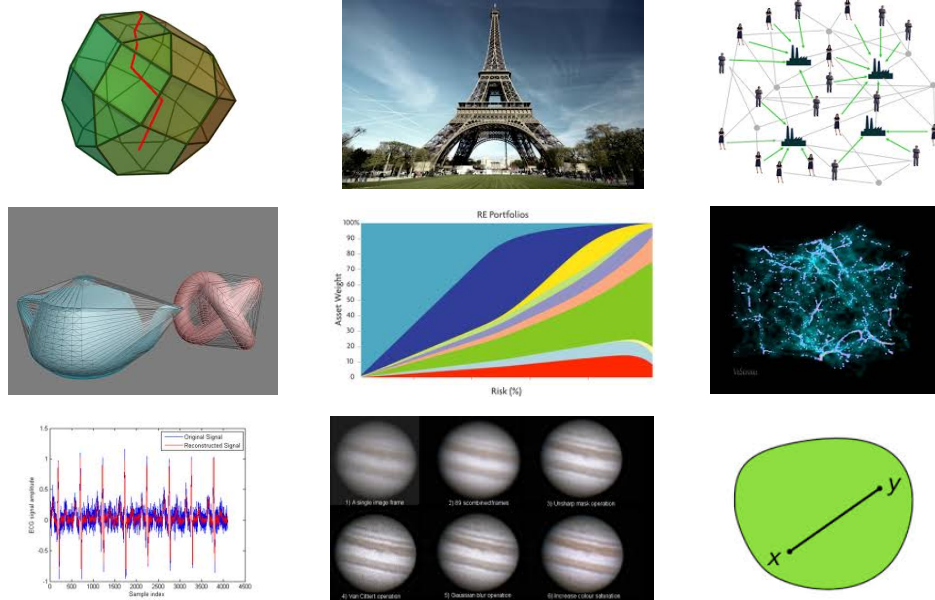
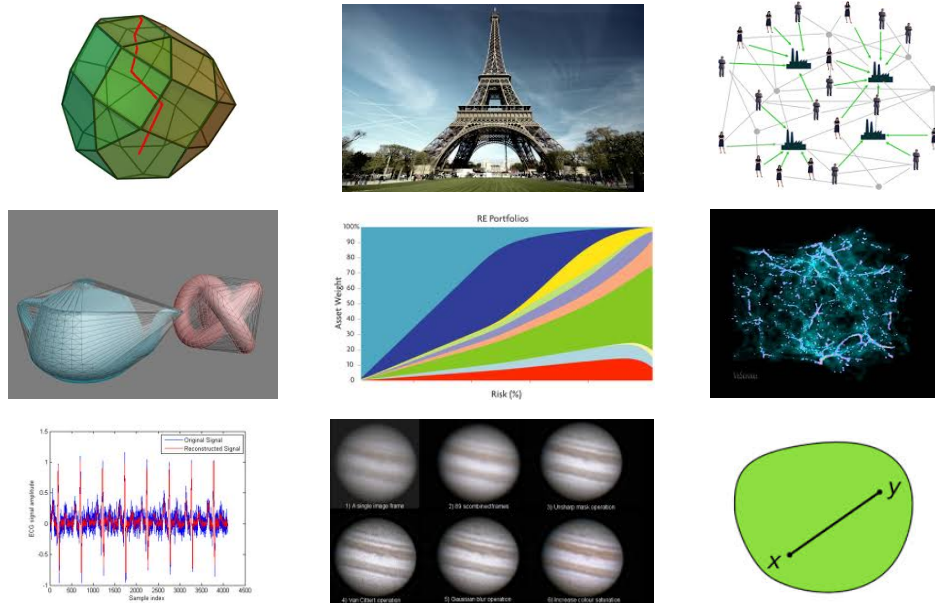




Konvexná optimalizácia - letný semester 2018

M. Trnovská, KAMŠ, FMFI UK



Téma 6: Dualita v kónickom lineárnom programovaní

Primárna úloha kónického LP

Dáta: $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ a $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, predpokladáme, že K je vlastný kužeľ.

Primárna úloha kónického lineárneho porgramovania

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x, \\ & Ax = b, \\ & x \in K. \end{aligned} \quad (P)$$

Množina prípustných riešení úlohy (P) a jej relatívne vnútro:

$$\mathcal{P} = \{x \in K \mid Ax = b\}, \quad \mathcal{P}^0 = \{x \in \text{int}K \mid Ax = b\}.$$

Optimálna hodnota úlohy (P):

$$p^* = \begin{cases} \inf_{x \in \mathcal{P}} c^T x & \mathcal{P} \neq \emptyset \\ +\infty & \mathcal{P} = \emptyset, \end{cases}$$

Množina optimálnych riešení:

$$\mathcal{P}^* = \{x \in \mathcal{P} \mid c^T x = p^*\}.$$

Zrejme $\mathcal{P}^* \subseteq \mathcal{P}$ je konvexná množina.

Lagrangeova funkcia $L(x, y, s)$ k úlohe (P):

$$L(x, y, s) = c^T x - y^T (Ax - b) - s^T x = x^T (c - A^T y - s) + b^T y.$$

Definičný obor Lagrangeovej funkcie by mal garantovať základnú vlastnosť Lagrangeovej funkcie - a to, že musí dávať dolné ohraničenie na hodnotu účelovej funkcie v ľubovoľnom prípustnom bode:

$$L(x, y, s) \leq c^T x, \quad \forall x \in \mathcal{P}$$

Na to stačí, aby $(x, y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times K^*$.

Lagrangeovu duálnu funkciu môžeme potom definovať ako

$$\mathcal{G}(y, s) = \inf_x L(x, y, s) = \begin{cases} b^T y & c - A^T y - s = 0 \\ -\infty & \text{inak.} \end{cases}$$

Duálna úloha k úlohe (P):

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y, \\ & A^T y + s = c, \\ & s \in K^*. \end{aligned} \quad (D)$$

Zrejme ak $(y^1, s) \in \mathcal{D}$ a $(y^2, s) \in \mathcal{D}$ a $h(A) = m$, tak musí platiť $y^1 = y^2$.

Množina prípustných riešení úlohy (D) a jej relatívne vnútro:

$$\mathcal{D} = \{(y, s) \in \mathbb{R}^m \times K^* \mid A^T y + s = c\},$$

$$\mathcal{D}^0 = \{(y, s) \in \mathbb{R}^m \times \text{int}K^* \mid A^T y + s = c\}.$$

Optimálna hodnota úlohy (D):

$$d^* = \begin{cases} \sup_{(y,s) \in \mathcal{D}} b^T y & \mathcal{D} \neq \emptyset \\ -\infty & \mathcal{D} = \emptyset, \end{cases}$$

a množina optimálnych riešení (D)

$$\mathcal{D}^* = \{(y, s) \in \mathcal{D} \mid b^T y = d^*\}.$$

Príklady primárno-duálnych dvojíc kónických úloh

Lineárne programovanie

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x, \\ & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & b^T y, \\ & A^T y + s = c, \\ & s \geq 0. \end{array}$$

Programovanie nad kužeľmi 2. rádu.

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x, \\ & Ax = b, \\ & \|\bar{x}\|_2 \leq x_0 \\ & x = (\bar{x}, x_0), \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & b^T y, \\ & A^T y + s = c, \\ & \|\bar{s}\|_2 \leq s_0 \\ & s = (\bar{s}, s_0). \end{array}$$

Príklady primárno-duálnych dvojíc kónických úloh

Semidefinitné programovanie.

$$\begin{array}{ll} \min & \text{tr}(CX), \\ & \text{tr}(A_i X) = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & X \succeq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & b^T y, \\ & \sum_{i=1}^m y_i A_i + S = C, \\ & S \succeq 0 \end{array}$$

Kopozitívne a kompletne pozitívne programovanie.

$$\begin{array}{ll} \min & \text{tr}(CX), \\ & \text{tr}(A_i X) = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & X \in \mathcal{C}_+^n \end{array} \qquad \begin{array}{ll} \max & b^T y, \\ & \sum_{i=1}^m y_i A_i + S = C, \\ & S \in \mathcal{P}_+^n \end{array}$$

Slabá dualita

Tvrdenie:

Nech $x \in \mathcal{P}$ a $(y, s) \in \mathcal{D}$. Potom platí

$$c^T x - b^T y = s^T x \geq 0.$$

Dôsledok:

Pre primárno-duálnu dvojicu úloh kónického lineárneho programovania platí:

- a) Optimálne hodnoty spĺňajú $d^* \leq p^*$.
- b) Ak je jedna z úloh neohraničená, tak druhá je neprípustná.
- c) Ak $\bar{x} \in \mathcal{P}$ a $(\bar{y}, \bar{s}) \in \mathcal{D}$ a platí $\bar{x}^T \bar{s} = 0$, tak $\bar{x}$ je optimálne riešenie úlohy (P) a $(\bar{y}, \bar{s})$ je optimálne riešenie úlohy (D).

Pre prípustné $x \in \mathcal{P}$ a $(y, s) \in \mathcal{D}$ budeme hodnotu $c^T x - b^T y = s^T x$ nazývať duálnou medzerou a hodnotu $p^* - d^*$ optimálnou duálnou medzerou.

Príklad.

Úloha SDP:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_{11} \\ & x_{12} = 1, \\ & X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} \succeq 0. \end{aligned}$$

- Odvodíme duálnu úlohu;
- Nájdeme optimálne hodnoty (prípadne optimálne riešenia);

Platí silná dualita, t.j. $p^* = d^*$, avšak optimum sa nadobúda len v duálnej úlohe.

Príklad.

Úloha SDP:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_{11} \\ & x_{33} = 0, \\ & x_{11} - 2x_{23} = 1, \\ & X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{pmatrix} \succeq 0. \end{aligned}$$

- Odvodíme duálnu úlohu;
- Nájdeme optimálne hodnoty (prípadne optimálne riešenia);

Obe úlohy nadobúdajú svoje optimálne riešenie avšak optimálna duálna medzera je $p^* - d^* = 1 > 0$.

Príklad.

Úloha SOCP:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_2 \\ & x_1 - x_3 = 0, \\ & x_2 = 1, \\ & \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq x_3, \end{aligned}$$

- Odvodíme duálnu úlohu;
- Nájdeme optimálne hodnoty (prípadne optimálne riešenia);

Duálna úloha má optimálne riešenie, avšak primárna úloha je neprípustná.

Obraz konvexného kužela v lineárnom zobrazení

Ak K je konvexný, uzavretý kužeľ ale nie je polyedrálly, tak jeho obraz v lineárnom zobrazení nemusí byť uzavretý!

$$\mathcal{S}_+^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \mid x_1 \geq 0, x_1 x_3 - x_2^2 \geq 0 \right\}$$

Lineárne zobrazenie

$$\mathcal{A} : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Kužeľ $\mathcal{A}(\mathcal{S}_+^2)$ nie je uzavretý.

Lema:

Predpokladajme, že $K \subseteq \mathbb{R}_+^n$ je vlastný kužeľ, alebo $K = K_1 \times \mathbb{R}^p$, kde $K_1 \subseteq \mathbb{R}^{n-p}$ je vlastný kužeľ v $\mathbb{R}^{n-p}$. Potom ak $(x^1, x^2) \in K$, $x^1 \neq 0$ a $y \in \text{relint} K^*$, tak $x^T y > 0$.

Dôkaz: ...

Veta:

Dané je lineárne zobrazenie maticou $\mathbf{A}$. Ak $K \subseteq \mathbb{R}_+^n$ je vlastný kužeľ, alebo $K = K_1 \times \mathbb{R}^p$, kde $K_1 \subseteq \mathbb{R}^{n-p}$ je vlastný kužeľ v $\mathbb{R}^{n-p}$ a platí

$$S(\mathbf{A}^T) \cap \text{relint}(K^*) \neq \emptyset,$$

tak $\mathbf{A}(K)$ je uzavretý kužeľ.

Dôkaz: ...

Farkasova lema

Platí práve jedna z alternatív:

$$\text{I } \exists x \geq 0 : Ax = b;$$

$$\text{II } \exists z : A^T z \geq 0, b^T z < 0.$$

(Zovšeobecnená Farkasova lema)

Nech $\mathbf{K} \subseteq \mathbb{R}_+^n$ je vlastný kužeľ, alebo $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \times \mathbb{R}^p$, kde $\mathbf{K}_1 \subseteq \mathbb{R}^{n-p}$ je vlastný kužeľ v $\mathbb{R}^{n-p}$. Potom platí najviac jedna z alternatív:

$$\text{I } \exists x \in \mathbf{K} : \mathbf{A}x = \mathbf{b};$$

$$\text{II } \exists z : \mathbf{A}^T z \in \mathbf{K}^*, \mathbf{b}^T z < 0.$$

Navyše ak je kužeľ

$$\mathbf{A}(\mathbf{K}) = \{\mathbf{A}x \mid x \in \mathbf{K}\}$$

uzavretý, tak platí práve jedna z alternatív.

Dôkaz využíva nasledujúcu vetu:

(Veta o separujúcej nadrovine)

Nech C je uzavretá konvexná množina a $x^0 \notin C$. Potom existuje nadrovina daná vektorom $v \neq 0$ a konštantou $\gamma \in \mathbb{R}$ tak, že platí

$$v^T x > \gamma \quad \forall x \in C, \quad v^T x^0 < \gamma.$$

Navyše, ak C je uzavretý konvexný kužeľ, tak existuje $v \neq 0$ tak, že platí

$$v^T x \geq 0 \quad \forall x \in C, \quad v^T x^0 < 0.$$

Silná dualita

Veta:

Ak $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$ a $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$, tak existuje $x^* \in \mathcal{P}$ a $(y^*, s^*) \in \mathcal{D}$ také, že $p^* = c^T x^* = b^T y^* = d^*$.

Dôkaz:

Pomocou Farkasovej lemy ukážeme, že systém

$$\begin{aligned} Ax &= b, & x &\in K, \\ A^T y + s &= c, & s &\in K^*, \\ c^T x + \gamma &= b^T y, & \gamma &\geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

má riešenie.

Podmienky optimality

Veta:

Ak $\mathcal{P}^0 \neq \emptyset$ a $\mathcal{D}^0 \neq \emptyset$, tak systém

$$\begin{aligned} Ax &= b, & x &\in K, \\ A^T y + s &= c, & s &\in K^*, \\ x^T s &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

je systémom nutných a postačujúcich podmienok optimality pre dvojicu úloh (P), (D).

Dôkaz: ...