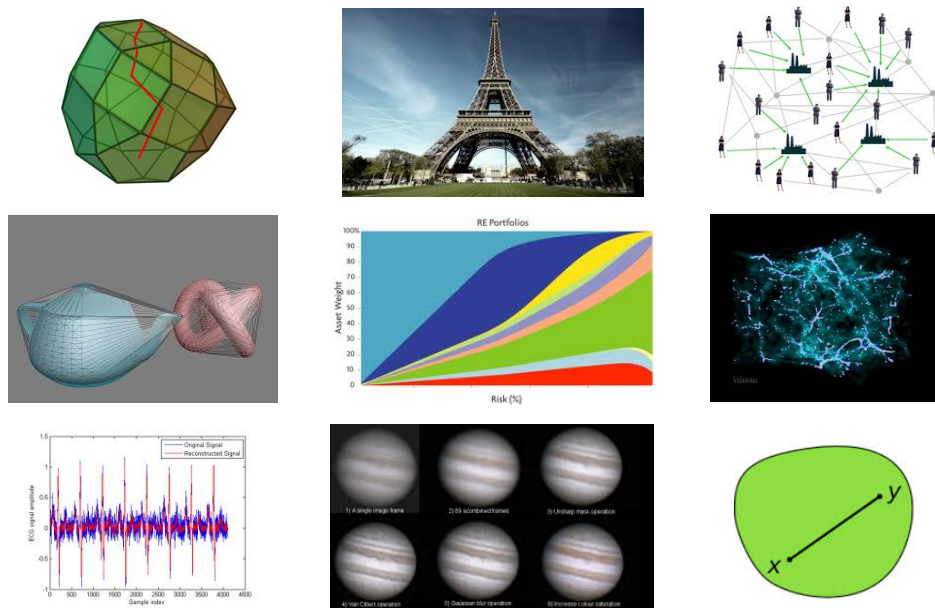
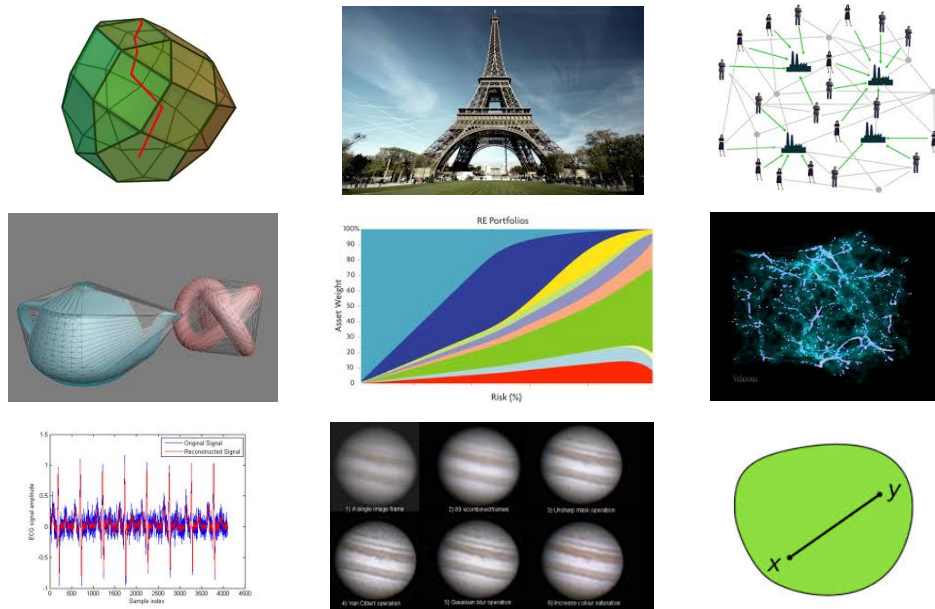




Konvexná optimalizácia - letný semester 2018

M. Trnovská, KAMŠ, FMFI UK



Téma 8: Kónické relaxácie

Kónické relaxácie

Majme danú nekonvexnú úlohu

$$\min_{x \in \mathcal{P}} f(x) \quad (1)$$

teda úlohu, kde buď účelová funkcia $f(x)$ alebo množina prípustných riešení $\mathcal{P}$ je nekonvexná.

BUNV - nekonvexnosť sa týka množiny $\mathcal{P}$ (prečo?)

Kónické relaxácie

Relaxácia úlohy (1) potom spočíva vo vnorení množiny $\mathcal{P}$ do vhodnej konvexnej množiny $\mathcal{C}$ (t.j. platí $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$) a riešení aproximačnej úlohy

$$\min_{x \in \mathcal{C}} f(x),$$

ktorej optimálna hodnota dáva dolné ohraničenie na optimálnu hodnotu úlohy (1).

Kónické relaxácie

Príklad.

Uvažujme binárnu úlohu lineárneho programovania

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b, \\ & x \in \{0, 1\}^n. \end{aligned}$$

Túto úlohu možno relaxovať napríklad lineárnou úlohou

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ & Ax = b, \\ & x \in [0, 1]^n. \end{aligned}$$

Kónické relaxácie

Relaxácia nekonvexných kvadratických úloh

Uvažujme úlohu nekonvexného kvadratického programovania

$$\begin{aligned} \min \quad & x^T P_0 x + q_0^T x + r_0 \\ & x^T P_i x + q_i^T x + r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{2}$$

kde matice $P_0, P_1, \dots, P_m \in \mathcal{S}^n$ nie sú nutne kladne semidefinitné. Prvým krokom pri relaxácii úlohy (2) je definovanie matice $X = xx^T$ a využitie vzťahu

$$x^T P x = \text{tr}(x^T P x) = \text{tr}(P x x^T) = \text{tr}(P X).$$

Kónické relaxácie

Úlohu (2) možno ekvivalentne preformulovať na nasledujúcu (nekonvexnú) úlohu

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{tr}(P_0 X) + q_0^T x + r_0 \\ & \text{tr}(P_i X) + q_i^T x + r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & X = x x^T. \end{aligned} \tag{3}$$

Konvexná semidefinitná relaxácia úlohy (2)

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{tr}(P_0 X) + q_0^T x + r_0 \\ & \text{tr}(P_i X) + q_i^T x + r_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{pmatrix} \succeq 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Kónické relaxácie

SOCP relaxácie

Keďže kužeľ kladne semidefinitných matíc je samoduálny, podmienka $X \succeq xx^T$ je ekvivalentná podmienke

$$\text{tr}(Y(X - xx^T)) = \text{tr}(XY) - x^T Y x \geq 0, \quad \forall Y \in \mathcal{S}_+^n.$$

Konvexá kvadratická relaxácia spočíva vo výbere dostatočného počtu vhodne zvolených matíc $Y_i \succeq 0$, čo vedie k aproximácii ohraňenia $X \succeq xx^T$ konečným počtom kvadratických ohraňení

$$\text{tr}(XY_i) - x^T Y_i x \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, M. \quad (5)$$

- Rôzne heuristiky pre voľbu matíc Y_i .

Kónické relaxácie

LP relaxácie

Lineárna aproximácia úlohy (2) spočíva v relaxácii semidefinitného ohraničenia $X \succeq xx^T$ konečným počtom lineárnych ohraničení.

$$\begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{pmatrix} \succeq 0 \Leftrightarrow z^T \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{pmatrix} z \geq 0, \quad \forall z \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Vhodnou voľbou konečného počtu vektorov $z_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ sa potom ohraničenie $X \succeq xx^T$ aproximuje ohraničeniami typu

$$z_j^T \begin{pmatrix} 1 & x^T \\ x & X \end{pmatrix} z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, M.$$

Kónické relaxácie

Problém bipartície

Uvažujme nasledujúci optimalizačný problém:

$$\begin{aligned} \min \quad & x^T W x \\ & x_i^2 = 1, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{6}$$

kde $W \in \mathcal{S}^n$. Úloha (7) je diskretná kvadratická úloha, kde príslušná množina prípustných riešení obsahuje 2^n bodov.

Ekvivalentná maticová formulácia:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{tr}(WX) \\ & X \succeq 0, \quad h(X) = 1, \\ & X_{ii} = 1, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{7}$$

SDP relaxácia - zanedbá sa nekonvexná podmienka $h(X) = 1$.

Kónické relaxácie

Úloha maximálneho rezu

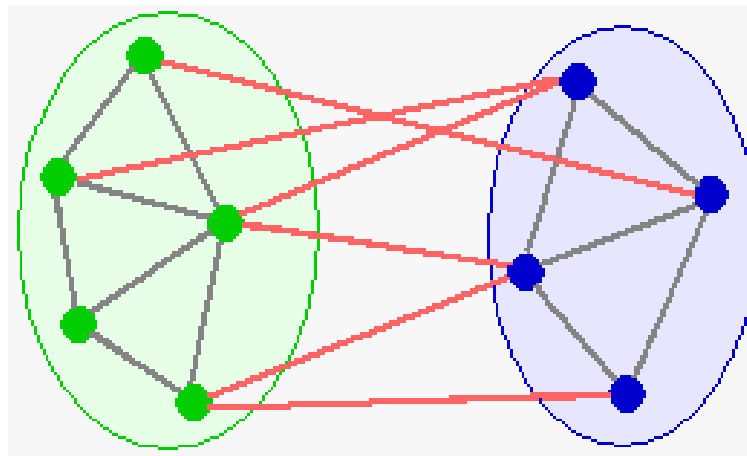
- $V = \{1, 2, \dots, n\}$ - množina vrcholov grafu
- $E = \{\{i, j\} \mid i, j \in V, i \neq j\}$ množinu hrán grafu

Pod jednoduchým grafom budeme rozumiť dvojicu $G = (V, E)$.

Nech $V' \subseteq V$. **Kapacitou** V' budeme nazývať počet hrán, ktoré spájajú vrcholy z V' s vrcholmi z $V \setminus V'$.

Kónické relaxácie

Úloha maximálneho rezu



Kapacita množiny zelených (modrých) vrcholov je 7.

Kónické relaxácie

Úloha maximálneho rezu je o hľadání takej množiny V' , ktorá má maximálnu kapacitu. Množina V' sa dá charakterizovať pomocou premennej $x \in \{-1, 1\}^n$ nasledovným spôsobom:

$$x_i = \begin{cases} 1 & i \in V' \\ -1 & i \in V \setminus V'. \end{cases}$$

Potom zrejme platí

$$(1 - x_i x_j) = \begin{cases} 0 & i \in V', j \in V \setminus V' \\ 2 & i, j \in V' \text{ alebo } i, j \in V \setminus V'. \end{cases}$$

Kónické relaxácie

Ak W je matica susednosti grafu, t.j. symetrická matica taká, že

$$W_{ij} = \begin{cases} 1 & \{i, j\} \in E \\ 0 & \{i, j\} \notin E. \end{cases}$$

tak problém maximálneho rezu možno naformulovať ako optimalizačnú úlohu

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n W_{ij} (1 - x_i x_j) \\ & x_i \in \{-1, 1\} \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{8}$$

ktorá je ekvivalentná s našou úlohou (7).

Kónické relaxácie

Autori slávneho článku

Goemans, M. X. & Williamson D. P. (1995) *Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming*, Journal of the ACM 42(6), 1115–1145.

riešili problém maximálneho rezu (8) nasledovnou aproximáciou:

Hodnoty x_i aproximovali vektorovými premennými

$$v_i \in S^n = \{z \mid z^T z = 1\},$$

pričom hodnotu $x_i x_j$ v účelovej funkcii nahradili skalárnym súčinom $v_i^T v_j$. Zrejme $|v_i^T v_j| \leq 1$.

Kónické relaxácie

Namiesto úlohy (8) potom riešili úlohu

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n W_{ij} (1 - v_i^T v_j) \\ & v_i \in S^n, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{9}$$

Takúto úlohu možno tiež riešiť pomocou **semidefinitného programovania**.

...

Kónické relaxácie

Algoritmus Goemansa a Williamsona spočíva v nasledujúcich troch krokoch:

1. Vyrieši sa úloha (9), nájdú sa vektory v_i , $i = 1, \dots, n$;
2. Vygeneruje sa náhodný vektor $r \in S^n$;
3. Množina V' sa volí ako $V' = \{i \mid v_i^T r \geq 0\}$, príslušná bipartícia množiny V je teda určená pomocou separovania vektorov v_i , $i = 1, \dots, n$ nadrovinou $\{z \mid r^T z = 0\}$.

Autori článku ukázali, že semidefinitná relaxácia dáva približné riešenie úlohy maximálneho rezu s aproximačným faktorom 87,8%.

Kónické relaxácie

Kónické relaxácie