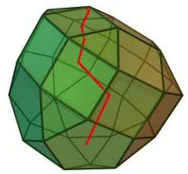
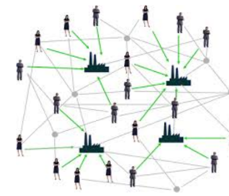
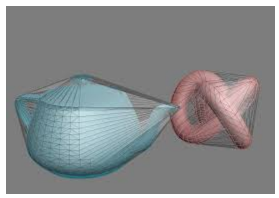
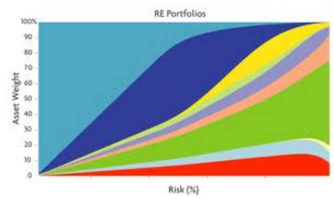
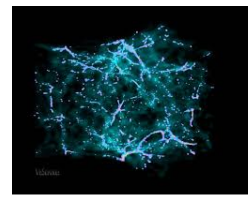
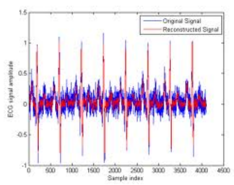


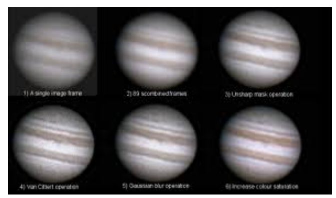


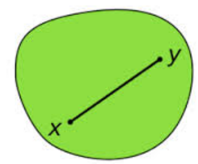






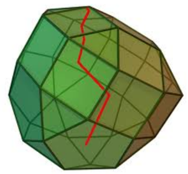


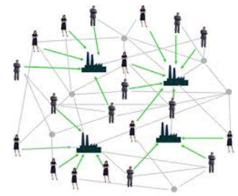


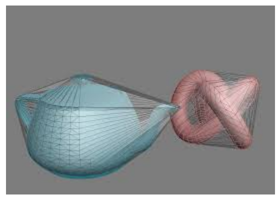


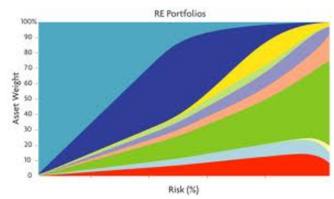
Konvexná optimalizácia - letný semester 2018

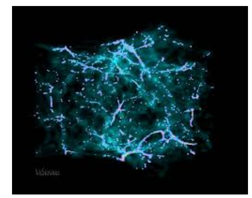
M. Trnovská, KAMŠ, FMFI UK

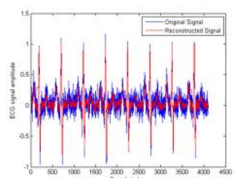


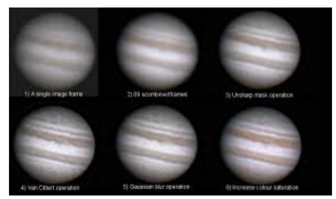


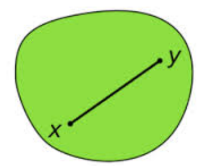












Téma 9: Nelineárne kónické úlohy

Nelineárne kónické úlohy

Budeme uvažovať úlohy typu

$$\begin{array}{ll} \min_x & f(x) = c^T x + \ln\det A(x)^{-1} \\ & B(x) \succeq 0, \end{array} \tag{1}$$

kde $x \in \mathbb{R}^n$ je premenná úlohy,

$$A(x) = A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i x_i, \; B(x) = B_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i x_i,$$

pre dáné symetrické matice $A_0, A_1, \ldots, A_n$, $B_0, B_1, \ldots, B_n$ a definičný obor účelovej funkcie $f(x)$ je otvorená množina

$$\mathcal{D} = \{x \mid A(x) \succ 0\}. \tag{2}$$

Nelineárne kónické úlohy

Príklad:

Špeciálnou podriedou úloh (1) sú úlohy

$$\min_x \quad f(x) = \ln\det A(x)^{-1} \tag{3}$$

s definičným oborom $\mathcal{D}$ definovanom v (2). Stačí zvoliť $c = 0$ a $B_0 \succeq 0, B_1 = \cdots = B_n = 0$. Budeme predpokladať, že $\mathcal{D}$ je neprázdna a ohraničená množina. Keďže účelová funkcia je rýdzo konvexná na $\mathcal{D}$ a jej hodnota neobmedzene rastie v blízkosti hranice $\mathcal{D}$, existuje jediné riešenie x^* úlohy (3), ktoré sa nazýva **analytický stred** $\mathcal{D}$.

Nelineárne kónické úlohy

Pokrývajúci elipsoid s minimálnym objemom

Daná je konečná množina bodov C. Úlohou je nájsť elipsoid s minimálnym objemom $\mathcal{E}$ ktorý ju pokrýva, t.j. platí $C \subseteq \mathcal{E}$.

Takýto elipsoid sa nazýva **Löwner-Johnov elipsoid** množiny C.

Pre niektoré špeciálne typy množín existujú explicitné vzorce na charakterizáciu Löwner-Johnovho elipsoidu.

My budeme uvažovať konečnú množinu $C = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Pre takúto množinu je úloha nájdenia Löwner-Johnovho elipsoidu ďalším špeciálnym typom úlohy (1).

Nelineárne kónické úlohy

Objem elipsoidu

Uvažujme elipsoid charakterizovaný kladne definitnou maticou A a stredom c:

$$\mathcal{E} = \{x \mid (x-c)^T A^2 (x-c) \leq 1\} = \{x \mid \|Ax - b\|_2 \leq 1\},$$

pričom $b = Ac$. Ak $0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ sú vlastné hodnoty matce A, tak ich prevrátené hodnoty $\frac{1}{\lambda_i} (i = 1, \ldots, n)$ určujú dĺžky poloosí elipsoidu $\mathcal{E}$.

Nelineárne kónické úlohy

Objem elipsoidu

Dá sa ľahko vidieť, že

$$\mathcal{E} = A^{-1}B(0,1) + c, \text{ kde } B(0,1) = \{z \mid \|z\|_2 \leq 1\},$$

teda každý elipsoid je obrazom jednotkovej gule v bijektívnom afínnom zobrazení. Preto objem elipsoidu $\mathcal{E}$ je

$$vol(\mathcal{E}) = \det A^{-1} V_n,$$

kde V_n je objem jednotkovej gule $B(0,1)$ v $\mathbb{R}^n$.

Nelineárne kónické úlohy

Úloha hľadania Löwner-Johnovho elipsoidu

Budeme uvažovať úlohu hľadania elipsoidu s minimálnym objemom, ktorý pokrýva konečnú množinu bodov $C = \{a_1, \ldots, a_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Konvexná formulácia takejto úlohy je

$$\begin{array}{ll} \min_x & \ln\det X^{-1} \\ & \|Xa_i - y\|_2 \leq 1,\ i = 1, \ldots, m, \end{array} \tag{4}$$

s maticovou premennou $X \succ 0$ a vektorovou premennou $y \in \mathbb{R}^n$. Normové ohraničenia $\|Xa_i - y\|_2 \leq 1$ možno prepísať na ekvivalentné kvadratické ohraničenia $\|Xa_i - y\|_2^2 \leq 1$.

Nelineárne kónické úlohy

Úloha hľadania Löwner-Johnovho elipsoidu

Pomocou CVX možno nájsť riešenie takej úlohy pomocou nasledujúceho kódu.

```
cvx_begin
   variable X(n,n) symmetric
   variable y(n)
   maximize log_det(X)
   subject to
       norms( X * A + y * ones( 1, m ), 2 ) <= 1;
cvx_end
```

Nelineárne kónické úlohy

Dualita pre úlohu hľadania Löwner-Johnovho elipsoidu so stredom v počiatku

Pre dané body $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ je teraz našou úlohou nájsť pokrývajúci elipsoid s minimálnym objemom, ktorý má stred v počiatku, t.j. $y = 0$. Takúto úlohu možno zrejme naformulovať ako

$$\begin{array}{ll} \min_x & \ln\det X^{-1} \\ & a_i^T X a_i \le 1,\ i = 1, \ldots, m, \end{array} \tag{5}$$

kde definičný obor účelovou funkcie je $\mathcal{D} = \mathcal{S}^n_{++}$.

Nelineárne kónické úlohy

Dualita pre úlohu hľadania Löwner-Johnovho elipsoidu so stredom v počiatku

Definujme $A_i = a_i a_i^T \succeq 0$, $i = 1, \ldots, m$. Výraz na ľavej strane ohraničení potom možno prepísať ako

$$a_i^T X a_i = \mathsf{tr}(A_i X).$$

Lagrangeova funkcia pre úlohu (5) teda bude $L : \mathcal{S}^n_{++} \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ definovaná ako

$$L(X, u) = \ln\det X^{-1} + \sum_{i=1}^{m} u_i \left[\mathsf{tr}(A_i X) - 1\right]$$

$$= \ln\det X^{-1} + \mathsf{tr}\left[X\left(\sum_{i=1}^{m} u_i A_i\right)\right] - u^T\mathbf{e}.$$

Nelineárne kónické úlohy

Dualita pre úlohu hľadania Löwner-Johnovho elipsoidu so stredom v počiatku

Lema: Platí

$$\nabla \ln \det X^{-1} = -X^{-1}.$$

Dôkaz: ....

Nelineárne kónické úlohy

Dualita pre úlohu hľadania Löwner-Johnovho elipsoidu so stredom v počiatku

Duálna funkcia je teda

$$g(u) = \inf_X L(X,u) = L(\hat{X},u) = \ln\det\left(\sum_{i=1}^{n} u_i A_i\right) + \mathsf{tr} I - u^T \mathbf{e}$$

s definičným oborom $\mathcal{D}(g) = \{u \mid \Sigma_{i=1}^n u_i A_i \succ 0\}$.

Lagrangeova duálna úloha má tvar

$$\begin{array}{ll} \max & \ln\det\left(\Sigma_{i=1}^n u_i A_i\right) + n - u^T \mathbf{e} \\ & u \geq 0. \end{array} \qquad (6)$$

Nelineárne kónické úlohy

Dualita pre úlohu hľadania Löwner-Johnovho elipsoidu so stredom v počiatku