Jordanov kanonický tvar matíc

Príklad 1.

Daná je matica

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10 & -5 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Úlohou je nájsť jej Jordanov tvar J a maticu M takú, že $A = MJM^{-1}$.

1.) Nájdeme charakteristický polynóm a vlastné čísla matice A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 10 & -5 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27 = (3-\lambda)^3.$$

Teda $\lambda = 3$ je trojnásobná vlastná hodnota matice A (algebraická násobnosť $\lambda = 3$ je 3).

2.) Nájdeme vlastné vektory matice . Tie sú riešením systému s nasledovnou maticou a nulovou pravou stranou.

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teda stačí nájsť riešenia rovnice $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$. Tieto riešenia môžme všeobecne zapísať ako

$$(t, s, t+2s)^T = t(1,0,1)^T + s(0,1,2)^T.$$

Teda priestor vlastných vektorov má dimenziu 2 (geometrická násobnosť $\lambda = 3$ je 2).

3.) Teda Jordanov tvar je

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4.) Nájdeme teraz maticu M. Stĺpce tejto matice budú tvoriť vektory w, y, z (v tomto poradí) pričom w, z sú vhodne zvolené vlastné vektory a y spĺňa $(A - \lambda I)y = w$.

1. spôsob Vektor y je teda riešením systému s maticou $A - 3I$ a pravou stranou w. Vektor w zatiaľ nepoznáme, vieme však, že je tvaru $w = (t, s, t+2s)^T$. Teda dostávame

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & -5 & t \\ -2 & -4 & 2 & s \\ 1 & 2 & -1 & t+2s \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & t/5 \\ 0 & 0 & 0 & t/5 + s/2 \\ 0 & 0 & 0 & t + 2s - t/5 \end{array}\right)$$

Táto sústava má riešenie ak $2t + 5s = 0$ a teda napr. $(t, s) = (-5, 2)$. Potom $w = (-5, 2, -1)^T$. Vektor y nájdeme ako riešenie rovnice $y_1 + 2y_2 - y_3 = -1$. Teda napr. $y = (1, 1, 4)^T$ (alebo

$y = (0,0,1)^T$). Vektor z stačí zvoliť tak, aby w, z boli lineárne nezávislé vlastné vektory. Teda napr. $(1,0,1)^T$. Preto

$$M = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>2. spôsob</u> (sleduje dôkaz z prednášky). Matica A je zrejme regulárna. Utvorme maticu $A' = A - 3I$, ktorá je singulárna. Platí

$$A' = A - 3I = MJM^{-1} - 3MM^{-1} = M(J - 3I)M^{-1}.$$

a teda maticu A' možno previesť na Jordanov tvar rovnakou maticou M. Uvažujme teda maticu

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matica A' má zrejme trojnásobné vlastné číslo $\lambda = 0$. Platí $\dim S(A') = h(A') = 1$ a $S(A)$ je generovaný napr. vektorom $w = (5, -2, 1)^T$. Tento vektor je zároveň vlastným vektorom ktorí prináleží $\lambda = 0$. Teda

$$(5, -2, 1)^T \in N(A') \cap S(A').$$

Zvolme y tak, že $A'y = w$. Teda riešime sústavu

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & -5 & 5 \\ -2 & -4 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Preto napr. $y = (1,0,0)^T$. Posledny vektor z hľadáme tak, aby platilo

$$z \in N(A') \setminus (N(A') \cap S(A')).$$

Stačí teda vziať napr.$z = (1,0,1)^T$ (iný vlastný vektor taký, že w, z sú lineárne nezávislé) . Teda

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.) Zrejme M nie je jednoznačne určená. Možno však overiť, že ($M --> 1.$ spôsob)

$$MJM^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -1/2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 9/2 & 19/2 & -7/2 \end{pmatrix} = A$$

resp. ($M --> 2.$ spôsob)

$$MJM^{-1} = M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Príklad 2.

Daná je matica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Úlohou je nájsť jej Jordanov tvar J a maticu M takú, že $A = MJM^{-1}$.

1.) Nájdeme charakteristický polynóm a vlastné čísla matice A.

$$\det A = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^4.$$

Teda $\lambda = 1$ je 4-násobná vlastná hodnota matice A (algebraická násobnosť $\lambda = 1$ je 4).

2.) Nájdeme vlastné vektory matice . Tie sú riešením systému s nasledovnou maticou a nulovou pravou stranou.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teda stačí nájsť riešenia rovnice $-x_1 + x_3 = 0$. Tieto riešenia môžme všeobecne zapísať ako

$$(t, s, t, 0)^T = t(1, 0, 1, 0)^T + s(0, 1, 0, 0)^T.$$

Teda priestor vlastných vektorov má dimenziu 2 (geometrická násobnosť $\lambda = 1$ je 2).

3.) Jordanov tvar nie je možné zatial určiť, vieme len, že pozostáva z dvoch Jordanovych blokov, ktoré však môžu mať rozmery 1x1 a 3x3 alebo 2x2 a 2x2.

4.) Nájdeme teraz maticu M. Stĺpce tejto matice budú tvoriť vlastné vektory a zovšeobecnené vlsstné vektory, ktoré s nimi tvoria reťazec.

1. spôsob Ak w je vlastný vektor, z ktorého môžme tvori reťazec, tak sústava $(A-I)v = w$ má riešenie. Riešme teda vo všeobecnosti sústavu:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 & t \\ -1 & 0 & 1 & 0 & s \\ -1 & 0 & 1 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t-s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Nemáme žiadne obmedzenie pre parametre t, s, a teda to znamená, že z oboch vlastných vektorov môžme tvoriť reťazce. (Z toho tiež vyplýva, že Jordanov tvar pozostáva z dvoch blokov rozmerov 2x2.) Zvolme teda napr. $(t,s) = (1,0)$ a $(t,s) = (0,1)$ a zodpovedalúce vlastné vektory $w_1 = (1,0,1,0)^T$ a $w_2 = (0,1,0,0)^T$. Vektor v_1 je riešením sústavy

$$-x_1 + x_3 + x_4 = 1, \quad x_4 = 1$$

a vektor v_2 je riešením

$$-x_1 + x_3 + x_4 = 0, \quad x_4 = -1$$

Teda napr. $v_1 = (0,0,0,1)^T$ a $v_2 = (0,0,1,-1)^T$ a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. spôsob (sleduje dôkaz z prednášky). Matica A je zrejme regulárna. Utvorme maticu $A' = A - I$, ktorá je singulárna. Platí

$$A' = A - I = MJM^{-1} - MM^{-1} = M(J-I)M^{-1}.$$

a teda maticu A' možno previesť na Jordanov tvar rovnakou maticou M. Uvažujme teda maticu

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matica A' má zrejme 4-násobné vlastné číslo $\lambda = 0$. Platí $\dim S(A') = h(A') = 2$ a $S(A)$ je generovaný napr. vektormi $w_1 = (1,1,1,0)^T, w_2 = (1,0,1,0)$. Tieto vektory sú vlastnými vektoromi pre $\lambda = 0$. Teda

$$w_1, w_2 \in N(A') \cap S(A').$$

Budeme teda hľadať y_i tak, že $A'y_i = w_i$ $(i = 1,2)$. Teda pre w_1 riešime sústavu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Preto napr. $y_1 = (0,0,1,0)^T$. Teda pre w_2 riešime sústavu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Preto napr. $y_1 = (0,0,0,1)^T$. Teda

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.) Jordanov tvar matice A je

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vynásobením matíc zistíme, že naozaj

$$MJM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A,$$

resp.

$$MJM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A$$