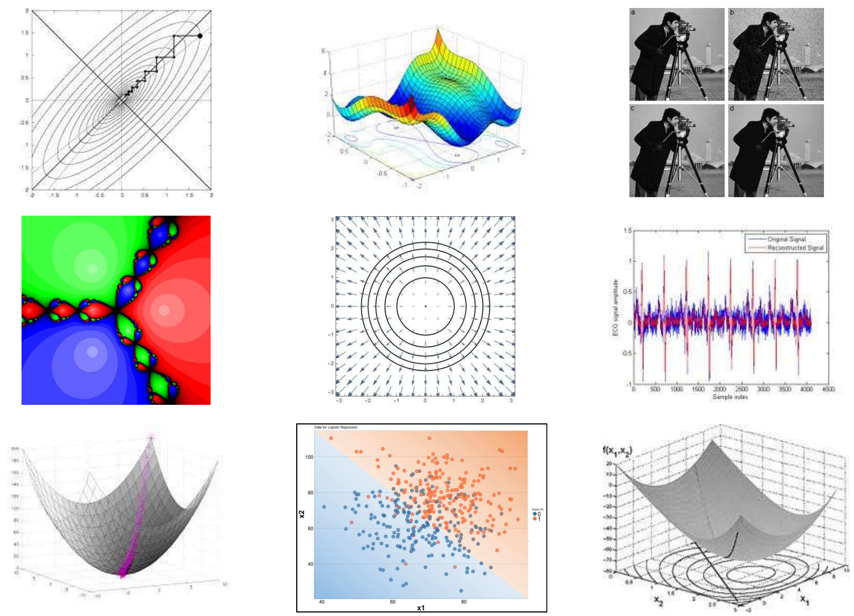


Metódy voľnej optimalizácie - letný semester 2019

M. Trnovská, KAMŠ, FMFI UK

Informácie o predmete

METÓDY VOĽNEJ OPTIMALIZÁCIE

- **Prednášajúca:** M. Trnovská (M 267)
  Cvičiaci: M. Hurban

- Informácie týkajúce sa predmetu na stránke

  `http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/trnovska/mvo.html`

- Konzultácie sa dajú dohodnúť mailom.
  `trnovska@pc2.iam.fmph.uniba.sk`

Podmienky hodnotenia

- **Domáce úlohy na cvičeniach**
  - 40 bodov, účasť povinná
  - Detaily hodnotenia stanoví cvičiaci

- **Skúška** - 60 bodov, na absolvovanie predmetu treba získať aspoň 15 bodov!
  - Minimálna kostra - základné znalosti
  - Písomka
  - Ústna časť (nepovinná)

- **Bonusové úlohy** (?)

Podmienky hodnotenia

body	známka
91-100	A
81-90	B
71-80	C
61-70	D
51-60	E

Literatúra

- Základná literatúra:
  M. Hamala, M. Trnovská: Nelineárne programovanie (1. časť)

- Doplnková literatúra:
  S. Boyd, L. Vandenberghe: Convex optimization
  A.Antoniou, L. Wu-Sheng: Practical Optimization

Harmonogram prednášok

- **Úvod do predmetu**

- **Metódy minimalizácie funkcie jednej premennej**
  - Metódy intervalovej aproximácie
  - Metódy bodovej aproximácie

- **Metódy minimalizácie funkcie n premenných**
  - Klasické metódy (Gradientné metódy, Metóda CSR, Newtonova metóda)
  - Moderné metódy (Združené gradienty, Kvázinewtonovské metódy)
  - Metódy pre veľkorozmerné úlohy (doplnková prednáška)

Úloha matematického programovania:

$$\begin{array}{ll} \min & f_0(x) \\ & x \in K \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

- **Úlohy na voľný extrém:** K je otvorená množina alebo $K = \mathbb{R}^n$
- **Úlohy s ohraničeniami:** K je uzavretá množina, spravidla definovaná pomocou rovností a nerovností:
  $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) \leq 0, i \in I,\ h_j(x) = 0, j \in J\}$,
  kde $I \neq \emptyset$ alebo $J \neq \emptyset$.
  - nekonvexné
  - konvexné (lineárne, nelineárne)

Metódy voľnej optimalizácie = metódy riešenia úloh na voľný extrém

- **Úlohy bez ohraničení** (rekonštrukcia signálu, klasifikácia dát - logistická regresia,...)

- **Úlohy s ohraničeniami** - riešia sa algoritmami, ktoré sú založené na postupnom riešení (parametrizovaných) úloh na voľný extrém, pričom postupnosť voľných miním takýchto úloh konverguje k minimu pôvodnej úlohy s ohraničeniami.

Aplikácia: Rekonštrukcia signálu

Signál je snímaný v pravidelných časových intervaloch a reprezentovaný nejakou funkciou závislou od času $x_i = x(t_i),\ i = 0, 1, \ldots, T$

Predpokladá sa, že signál sa príliš nemení - $x_i \approx x_{i+1}$

Audio signál - jednorozmerný signál

Obrázky/video - viacrozmerné signály

Prijatý signál je obyčajne znečistený šumom v:

$$x_{sum} = x + v$$

Úloha: odhadnút' pôvodný signál x zo zašumeného signálu x_{sum} (signal de-noising)

Formulácia úlohy:

$$Min \left\{ \|x - x_{sum}\|_2 + \gamma \phi(x) \mid x \in \mathbb{R}^{T+1} \right\}$$

$\phi(x)$ je nejaká regularizačná funkcia

Kvadratické vyhladenie

$$\phi_{quad}(x) = \Sigma_{i=0}^{T}(x_{i+1} - x_i)^2 = \|Dx\|_2^2$$

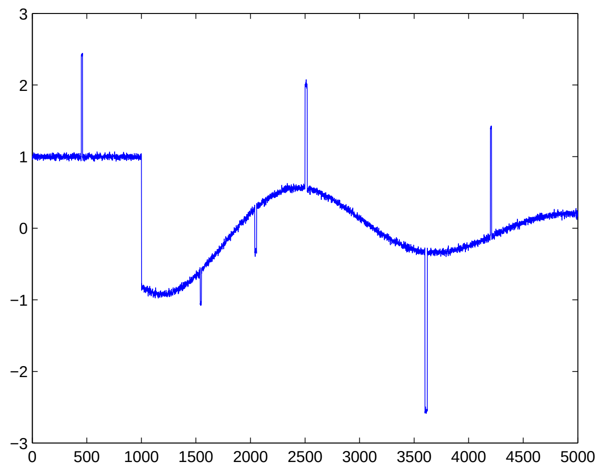
Totálna varácia

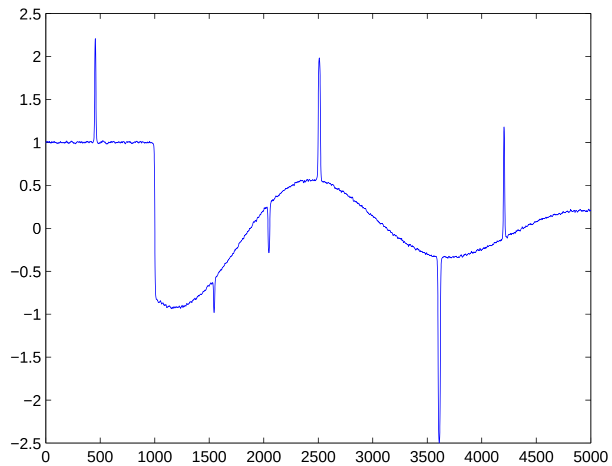
$$\phi_{tv}(x) = \Sigma_{i=0}^{T}|x_{i+1} - x_i| = \|Dx\|_1$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{T\times(T+1)}$$

Ak je pôvodný signál hladký a šum sa prudko mení - $\phi_{quad}(x)$
Ak sa skokovito menia hodnoty pôvodného signálu - $\phi_{tv}(x)$

Kvadratické vyhladenie

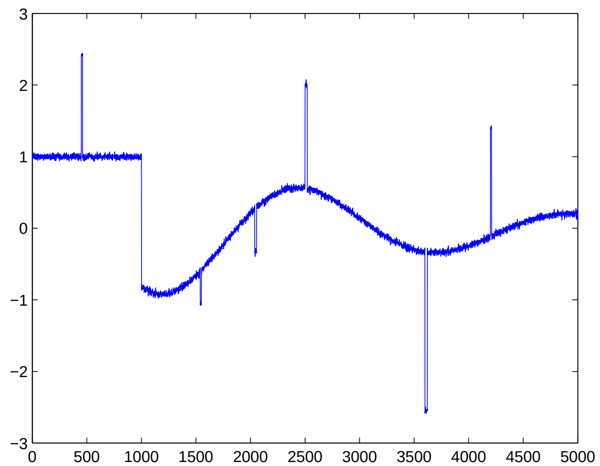




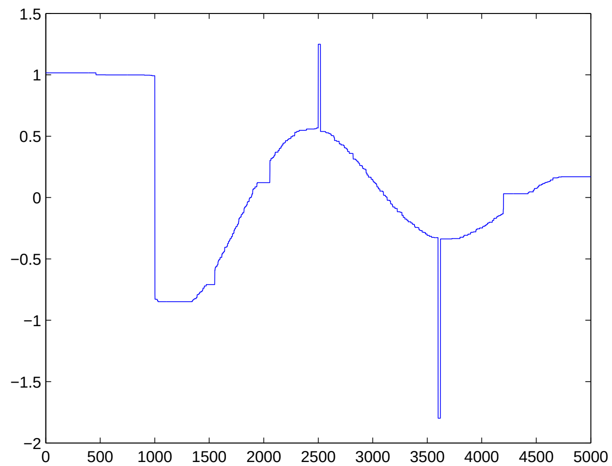
zašumený signál

KV rekonštruovaný signál $\gamma = 0.9$

Totálna variácia



zašumený signál



TV rekonštruovaný signál $\gamma = 0.9$

Rekonštrukcia voacrozmerného signálu

$$Min \left\{ \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|Wx\|_1 \mid x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

b - rozmazaný $m \times n$ obrázok reprezentovaný ako mn rozmerný vektor
A lineárna transformácia reprezentujúca "rozmazanie"
W ortogonálna matica reprezentujúca vlnkovú transformáciu (wavelet)

Observed Image

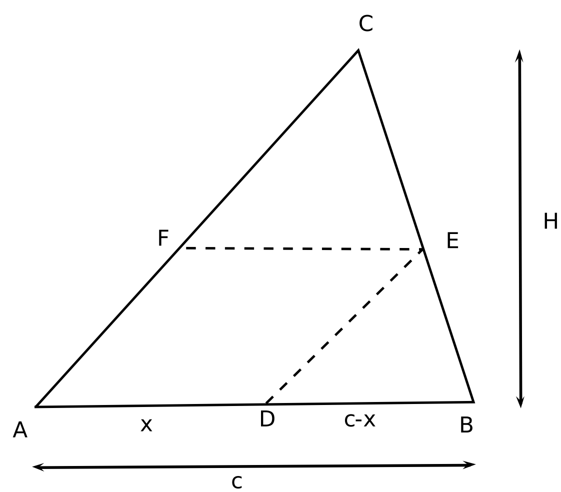
Reconstructed Image (lambda=0.001)

História optimalizačných úloh

Euklidova úloha:

Do daného trojuholníka ABC *vpíšte rovnobežník* $ADEF$ *tak, že* $AF \parallel DE$, $AD \parallel EF$ *a jeho obsah je maximálny.*

Ako naformulujeme Euklidov problém ako optimalizačnú úlohu?



Euklides našiel riešenie geometrickou úvahou

Dnes vieme, že stačí riešiť $f'(x) = 0$.
Fermat (1601-1665)
Newton (1643-1727)
Leibnitz (1646-1716)
Lagrange (1736-1813)
Cauchy (1789-1857)

Dantzig - 1947 - simplexová metóda
Kuhn, Tucker - 1950 - nelineárne programovanie
Klee, Minty - 1972
Karmarkar - 1984
Nesterov, Nemirovski - 1994

Základné princípy

Majme úlohu matematického programovania

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ & x \in K \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned} \qquad (MP)$$

Bod $\hat{x} \in K$ sa nazýva

globálne minimum úlohy (MP) ak $f(\hat{x}) \leq f(x) \; \forall x \in K$

ostré globálne minimum úlohy (MP) ak $f(\hat{x}) < f(x) \; \forall x \in K \setminus \{\hat{x}\}$

lokálne minimum úlohy (MP) ak
$\exists \varepsilon > 0 : \; f(\hat{x}) \leq f(x) \; \forall x \in K \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\hat{x})$

ostré lokálne minimum úlohy (MP) ak
$\exists \varepsilon > 0 : \; f(\hat{x}) < f(x) \; \forall x \in K \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\hat{x}) \setminus \{\hat{x}\}$

Budeme používať značenie

$$g(x) = \nabla f(x),\ H(x) = \nabla^2 f(x)$$

Nutné a spostačujúce podmienky pre lokálne minimum úlohy na voľný extrém ($K = \mathbb{R}^n$):

Nutná podmienka 1. rádu: $g(\hat{x}) = 0$

Nutné podmienky 2. rádu: $g(\hat{x}) = 0,\ H(\hat{x}) \succeq 0$

Postačujúce podmienky 2. rádu: $g(\hat{x}) = 0,\ H(\hat{x}) \succ 0$

Ak je funkcia f konvexná: lokálne minimum=globálne minimum

Kritériá konvexnosti funkcie f

(Ak treba diferencovaťeľná) funkcia $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je konvexná na $\mathcal{D}$ ak množina $\mathcal{D}$ je konvexná a

$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \forall \lambda \in [0,1] : \; f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)y$$

Kritérium 1. rádu

$$\forall x, y \in \mathcal{D} : \; f(x) \geq f(y) + \nabla f(y)^T (x - y)$$

Kritérium 2. rádu

$$\forall x \in \mathcal{D} : \; \nabla^2 f(x) \succeq 0$$

Úloha

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

sa spravidla rieši **iteračným algoritmom**, ktorý generuje postunosť bodov:

$$x^0, x^1, x^2, \ldots\ldots \in \mathbb{R}^n \quad f(x^k) \ \to f(\hat{x}).$$

Algoritmus končí v tzv. ε-**presnom riešení**, t.j. platí

$$f(x^k) - f(\hat{x}) < \varepsilon \text{ alebo } \|g(\hat{x})\| < \varepsilon.$$

Všeobecná schéma algoritmov:

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k s^k,$$

kde s^k je smer (nenulový vektor) v k-tej iterácii, λ_k je dĺžka smeru s^k