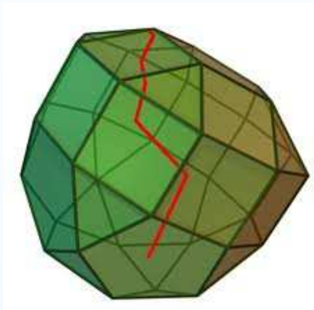
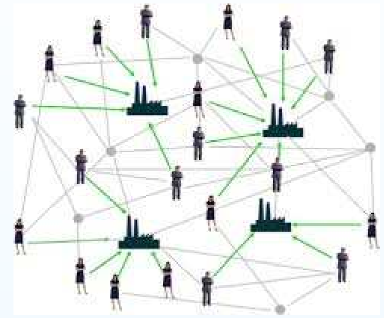
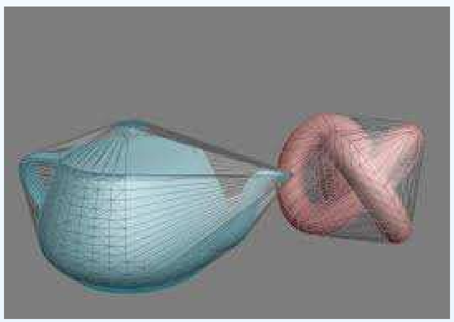
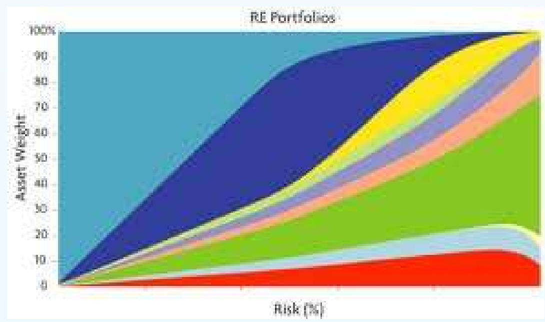
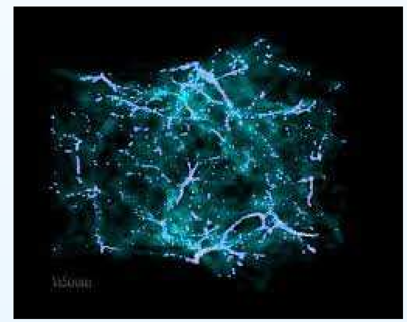
Konvexná optimalizácia

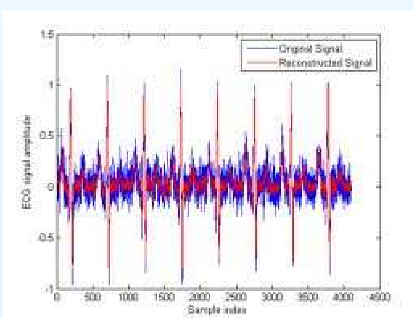


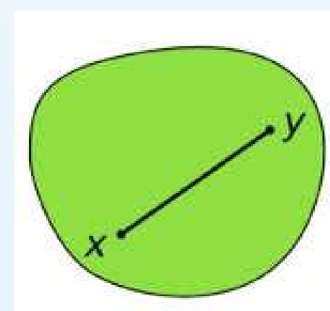












Konvexná optimalizácia - letný semester 2017

M. Trnovská, KAMŠ, FMFI UK

Význam konvexnej optimalizácie

.... To čo už dávno vieme z prednášok nelineárneho programovania.....
(alebo by sme mali, ale sme zabudli)

- Množina prípustných riešení je konvexná.
- Každé lokálne minimum je globálnym minimom.
- Existujú algoritmy, ktoré vedia **spoľahlivo a efektívne** riešiť aj veľké úlohy.
- Existujú **solvre a modelovacie nástroje**, v ktorých sú tieto algoritmy implementované - stačí len správne definovať úlohu.
- Problém - identifikovať / naformulovať úlohu ako úkohu konvexnej optimalizácie $\rightarrow$ KONVEXNÁ ANALÝZA.

Konvexná optimalizácia

- Prekvapivo vel'a úloh sa dá naformulovat' ako konvexná úloha
- **Aplikácie konvexnej optimalizácie:** inžinierske, finančné (optimalizácia portfólia, preferencie) optimálny dizajn (topologický, experimentálny), aproximácia a fitovanie dát, štatistika, siete, spracovanie signálu (obraz, zvuk), optimálne riadenie, geometrické úlohy (linearna a nelineárna separácia bodov) - dokonca modelovanie vesmíru
- Nekonvexné úlohy - mnohé algoritmy sú založené na riešení konvexných podúloh
- Konvexná relaxácia nekonvexných úloh - získa sa odhad na optimálnu hodnotu

"In fact the great watershed in optimization isn't between linearity and nonlinearity, but convexity and nonconvexity"

T. Rockafellar

Témy predmetu konvexná optimalizácia

- História, význam konvexnej optimalizácie
- Úloha konvexného programovania v užšom a širšom zmysle (kónické úlohy)
- Konvexné množiny
- Konvexné funkcie
- Trocha maticovej analýzy - blokové matice, Schurov doplnok, pseudoinverzie
- Triedy úloh konvexnej optimalizácie, transformácie úloh
- Podmienky optimality a dualita
- Aplikácie konvexnej optimalizácie a modelovací systém CVX
- Úvod do metód vnútorného bodu

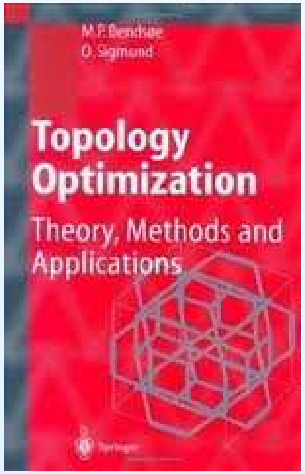
Využitie konvexnej optimalizácie

- Topologický dizajn - Problém Eiffelovej veže

  - TRUSS - mechanická konštrukcia zložená z priečok a uzlov, na ktoré pôsobí zát’až
  - Optimalizuje sa "pevnost’ konštrukie"

Konvexná optimalizácia

- - **Vstup:** pozície uzlov, zát'až na uzly, celková hmotnost' (objem) konštrukcie
  - **Premenné úlohy:** váhy pridelené jednotlivým priečkam
  - **Úloha:** nájst' optimálne rozloženie váh tak, aby bola konštrukcia čo najpevnejšia - aby bola potenciálna energia reprezentujúca poddajnost' konštrukcie minimálna
- M. P. Bendsøe, O. Sigmund: Topology Optimization - Theory, Methods and Applications



Konvexná optimalizácia

4.3 Computational procedures and examples 245

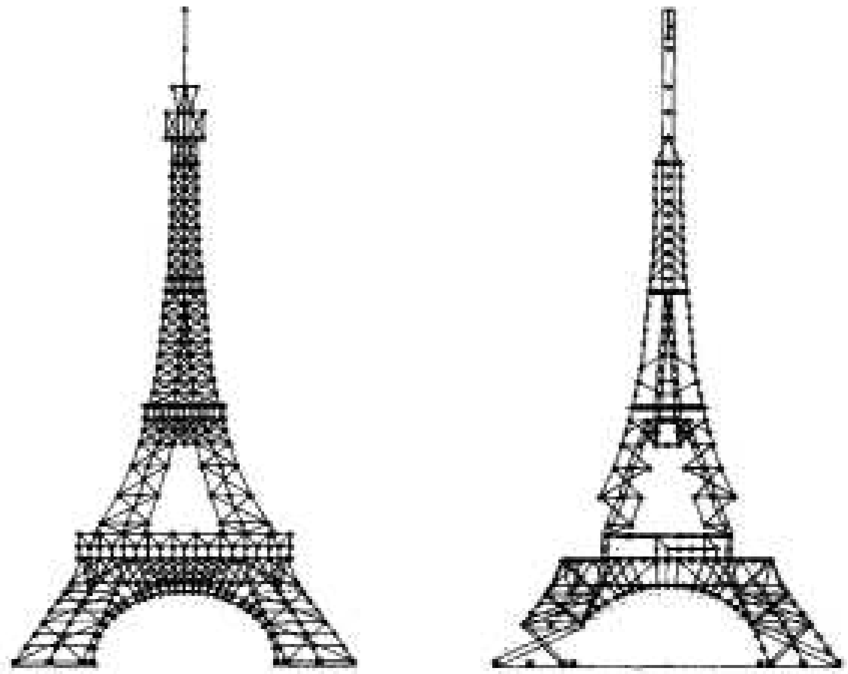


Fig. 4.6. The flexibility in choice of ground structure. Optimal design of a well-known structure. Left hand picture shows the ground structure and the right hand picture the optimal topology for a single downward load at the top of the structure. The example shows that it is crucial to consider multiple load cases for realistic structures. By courtesy of M. Kocvara and J. Zowe.

Konvexná optimalizácia

- **Kozmológia: Rekonštrukcia "ranného" vesmíru**

  - Y. Breiner, U. Frisch, M. Hénon, G. Loeper, S. Matatrrese, R. Mohayaee, A. Sobolevski: **Reconstruction of the early Universe as a convex optimization problem**, *Monthly Notices* of the Royal Astronomical Society, 2003.

Konvexná optimalizácia

Mon. Not. R. Astron. Soc. **346,** 501–524 (2003)

Reconstruction of the early Universe as a convex optimization problem

Y. Brenier,[1] U. Frisch,[2,3]★ M. Hénon,[2] G. Loeper,[1] S. Matarrese,[4] R. Mohayaee[2] and A. Sobolevskiĭ[2,5]

[1] *CNRS, UMR 6621, Université de Nice-Sophia-Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02, France*
[2] *CNRS, UMR 6529, Observatoire de la Côte d'Azur, BP 4229, 06304 Nice Cedex 4, France*
[3] *Institute for Advanced Study, Einstein Drive, Princeton, NJ 08540, USA*
[4] *Dipartimento di Fisica 'G. Galilei' and INFN, Sezione di Padova, via Marzolo 8, 35131-Padova, Italy*
[5] *Department of Physics, M. V. Lomonossov Moscow University, Leninskie Gory, 119992 Moscow, Russia*

Accepted 2003 August 10. Received 2003 August 1; in original form 2003 April 10

ABSTRACT

We show that the deterministic past history of the Universe can be uniquely reconstructed from knowledge of the present mass density field, the latter being inferred from the three-dimensional distribution of luminous matter, assumed to be tracing the distribution of dark matter up to a known bias. Reconstruction ceases to be unique below those scales – a few Mpc – where multistreaming becomes significant. Above 6 h^{-1} Mpc we propose and implement an effective Monge–Ampère–Kantorovich method of unique reconstruction. At such scales the Zel'dovich approximation is well satisfied and reconstruction becomes an instance of optimal mass transportation, a problem which goes back to Monge. After discretization into N point masses one obtains an assignment problem that can be handled by effective algorithms with not more than $O(N^3)$ time complexity and reasonable CPU time requirements. Testing against N-body cosmological simulations gives over 60 per cent of exactly reconstructed points.

We apply several interrelated tools from optimization theory that were not used in cosmological reconstruction before, such as the Monge–Ampère equation, its relation to the mass transportation problem, the Kantorovich duality and the auction algorithm for optimal assignment. A self-contained discussion of relevant notions and techniques is provided.

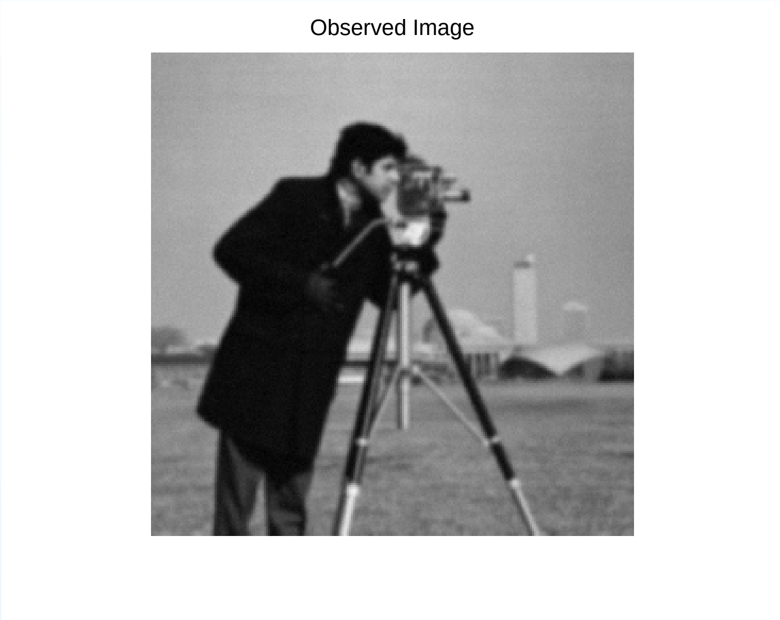
Konvexná optimalizácia

- **Spracovanie obrazu**

$$Min \quad \frac{1}{2}\|Ax-b\|_2^2+\lambda\|Wx\|_1$$

  - b - rozmazaný $k \times l$ obrázok (signál) reprezentovaný ako $M = kl$ rozmerný vektor
  - A - $M \times N$ lineárna transformácia reprezentujúca "rozmazanie"
  - W ortogonálna matica reprezentujúca vlnkovú transformáciu (wavelet) - popisuje aké frekvencie sa v danom čase nachádzajú v signále.

Konvexná optimalizácia




```
[M,N]=size(A); lambda=0.001;
cvx_begin
    variable x(n)
    maximize(suqare_pos(norm(A*x-b))+lambda*norm(W*x,1)
cvx_end
```

Konvexná optimalizácia

Po absolvovaní predmetu by mal študent:

- vedieť základy **konvexnej analýzy** potrebnej na
  - identifikovanie konvexnej úlohy
  - "konvexifikáciu" nekonvexných úloh
- utvrdiť si poznatky týkajúce sa **Lagrangeovej duality a podmienok optimality** pre konvexné úlohy + rozšírenie poznatkov na zovšeobecnené konvexné úlohy
- oboznámiť sa s **kónickými konvexnými úlohami** a ich významom
- poznať rôzne praktické **aplikácie** konvexnej optimalizácie z prednášok a z "vlastnej skúsenosti" (ktorú získa vypracovaním **projektu**
- byť oboznámený s modelovacím systémom **CVX**
- poznať myšlienku, teoretické a praktické aspekty **metód vnútorného bodu**.

Pravidlá hodnotenia predmetu:

- Celkové hodnotenie predmetu závisí od domácich úloha a hodnotenia projektu, ktorý sa vypracováva **v skupinách** (1-3 študenti). Každá skupina po vypracovaní projektu určí podiel práce jednotlivých členov na projekte číslom (váhou) z intevalu $[0, 1]$ (pričom celkový súčet musí byť' 1).
- Domáce úlohy sú vypracované podrobne a čitateľne, so zdôvodnením jednotlivých krokov. Môžu byť' vypracované v Latex-u. Riešenia domácich úloh obsahujú aj zadanie domácej úlohy (ak treba, pošlem kód). Všetko, čo bolo spomenuté na slajdoch možno použit' ako fakt. (4x15 bodov)
- Projekt je spracovaný ako pdf prezentácia, v závere semestra sa projekty prezentujú na prednáške. (30+10 bodov, ktorými sa študenti hodnotia navzájom.

Konvexná optimalizácia

- **Hodnotenie člena skupiny** s váhou w je

$$\frac{w.x}{w_{max}} + y,$$

kde w_{max} je maximálna váha v skupine, x je získaný počet bodov skupiny za projekt a y je počet bodov za naštudovanie a prezentáciu článku.

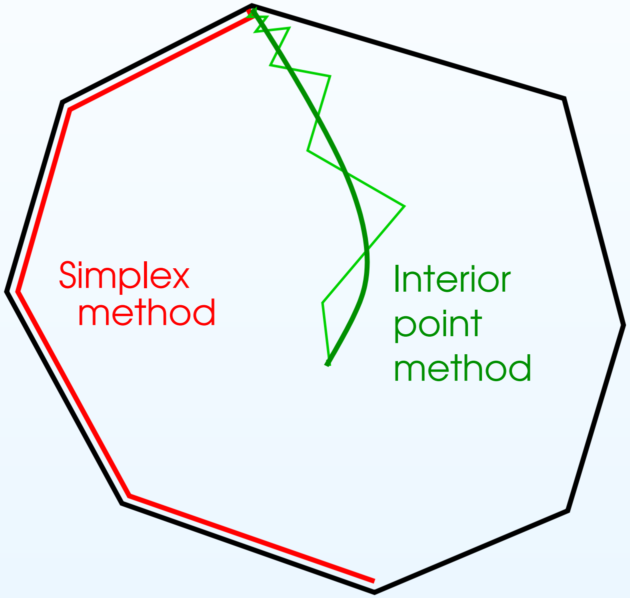
- Známka za predmet **konvexná optimalizácia**:

body	známka
100-90	A
81-90	B
71-80	C
61-70	D
51-60	E

História modernej konvexnej optimalizácie

- 1947 - G. B. Dantzig - simplexová metóda
- 1968 - Fiacco & McCormick - metóda SUMT
- 1972 - Klee & Minty cube
- 1979 - Leonid Khachian - elipsoidná metóda - 1. polynomiálny algoritmus pre LP, v praxi pomalý
- 1984 - Narendra Karmarkar - "projektívny" algpritmus pre LP - polynomiálny aj rýchly, začiatok moderných metód vnútorného bodu

Konvexná optimalizácia



Konvexná optimalizácia

- 1988 - Nesterov, Nemirovski - zovšeobecnenie MVB na všeobecné konvexné úlohy
- 1992 - vznik semidefinitného programovania - prvé efektívne algoritmy
- 2000-.... - kónické programovanie (SOCP), aplikácie v ďalších oblastiach (optimálny dizajn, spracovanie obrazu,....), metódy pre nehladnké konvexné úlohy,....

Konvexná optimalizácia

Úloha konvexného programovania v užšom zmysle:

$$\begin{aligned} min \quad & f_0(x) \\ & f_i(x) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, p. \end{aligned}$$

- $f_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i = 0, 1, \ldots, m$ - konvexné funkcie
- $h_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, p$ - afínne funkcie

Množina prípustných riešení

$$\mathcal{P} = \{x \mid f_i(x) \le 0, i = 1, \ldots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \ldots, p.\}$$

je konvexná (lebo ... ?)

Zovšeobecnenie úlohy konvexného programovania

Nech $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexná množina

$$\begin{aligned} min \quad & f_0(x) \\ & x \in \mathcal{C} \end{aligned}$$

Množina $\mathcal{C}$ by mala byť vhodne popísaná, aby sa úloha dala analyzovať a bolo možné navrhnúť metódy na riešenie.

Príklad: $\mathcal{C} = \mathcal{S}_+^2 = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid X = X^T, X \text{ je k.s.d}\}$ - konvexná množina

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_+^2 \;\Leftrightarrow\; x \geq 0, (\; z \geq 0,)\; y^2 - xz \leq 0$$

- nekonvexné ohraničenie

Semidefinitné programovanie

- $C, A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{S}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$

- štandardný tvar úlohy SDP:

$$\begin{array}{ll} min & \mathrm{tr}(CX) \\ & \mathrm{tr}(A_i X) = b_i \quad i = 1, \ldots, m \\ & X \succeq 0 \end{array}$$

- SDP s ohraničeniami typu LMI

$$\begin{array}{ll} max & b^T y \\ & y_1 A_1 + \cdots + y_m A_m \preceq C \end{array}$$

Príklad: Markowitzovo portfólio

n	počet aktív
x_i	(relatívne) množtvo aktíva i ($i = 1, 2, \ldots, n$)
p_i	výnos aktíva i
$\bar{p} = E(p)$	očakávaný výnos
$\Sigma = E((p - \bar{p})(p - \bar{p})^T)$	kovariančná matica výnosov
$x^T \Sigma x$	variancia portfólia x - miera rizika

Klasická úloha:

$$\begin{array}{ll} min_x & x^T \Sigma x \\ & \bar{p}^T x \geq r_{min} \\ & \mathbf{1}^T x = 1, \qquad x \geq 0 \end{array}$$

- konvexná kvadratická úloha s lineárnymi ohraničeniami

Alternatívna úloha:
Dané je portfólio x a čiastková informácia o kovariančnej matici Σ - napr.

- $L_{ij} \leq \Sigma_{ij} \leq U_{ij}$,
- Σ_{ii} - sú známe, o $\Sigma_{ij}, i \neq j$ máme neúplnú (resp. žiadnu) informáciu
- navyše $l_{ij} \leq \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{(\Sigma_{ii}\Sigma_{jj})}} \leq u_{ij}$

Hľadáme "najhoršie možné riziko" vrámci daných ohraničení:

$$\begin{array}{ll} max_{\Sigma} & x^T \Sigma x \\ & L_{ij} \leq \Sigma_{ij} \leq U_{ij} \\ & \Sigma \succeq 0 \end{array}$$

- úloha semidefinitného programovania, lebo
$x^T \Sigma x = \mathrm{tr}(x^T \Sigma x) = \mathrm{tr}(\Sigma x x^T)$.

Úloha kónického lineárneho programovania (KLP)

$$\begin{aligned} min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \in K \end{aligned}$$

kde K je konvexný kužeľ

1. konvexná množina
2. kužeľ - $x \in K \;\Rightarrow\; \alpha x \in K \; \forall \alpha \geq 0$

1.+2. - $x, y \in K \;\Rightarrow\; \alpha x + \beta y \in K \; \forall \alpha, \beta \geq 0$

Známe triedy:

K	$\mathbb{R}^n_+$	$\mathcal{S}^n_+$	$K_{\|\cdot\|_2}$	$\mathcal{C}^n_+$
úloha	LP	SDP	SOCP	CPP

Konvexná optimalizácia

SDP:

$$\mathcal{S}_+^n = \{X \in \mathcal{S}^n \mid y^T X y \geq 0 \; \forall y\}$$

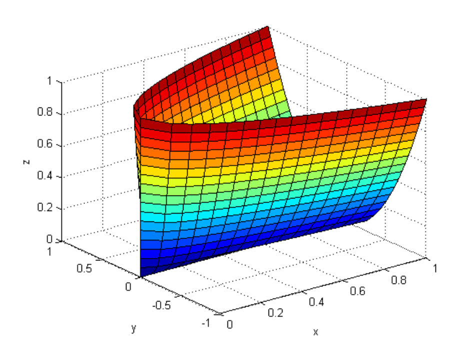
SOCP:

$$K_{\|\cdot\|_2} = \{(x, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 \leq x_0\}$$

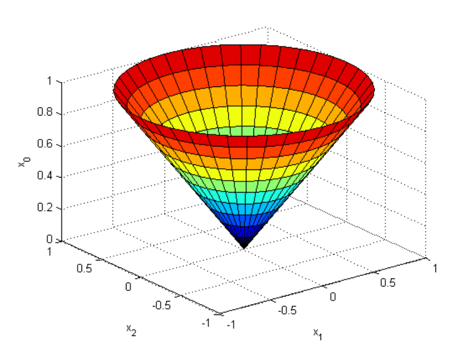
CPP:

$$\mathcal{C}_+^n = \{X \in \mathcal{S}^n \mid z^T X z \geq 0, \; \forall z \geq 0\}$$

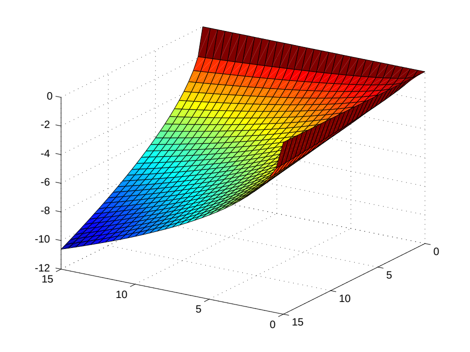
SDP



SOCP



CPP



Kónické lineárne programovanie = "zjednocujúci" pohľad na konvexnú optimalizáciu

Každú úlohu konvexného programovania v užšom zmysle:

$$\begin{aligned} min \quad & f_0(x) \\ & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & Ax = b \end{aligned}$$

možno naformulovať ako úlohu KLP !

- Epigraf konvexnej funkcie $Epi(f) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(x) \leq t\}$ je konvexná množina.
- Pre konvexná množinu C definujeme konvexný kužeľ

$$K_C = \{(x,s) \mid s > 0, \frac{x}{c} \in C\} \cup \{0\},$$

zrejme $x \in C \;\Leftrightarrow\; (x,1) \in K_C$.

Vlastné kužele

- K - vlastný kužel' (uzavretý, konvexný, špicatý, neprázdne vnútro)
- $x \succeq_K y \;\Leftrightarrow\; x - y \in K$
- $\succeq_K$ - v ciastočné usporiadanie (r, as,t), invariantné vzhl'adom na sčitovanie, nezáporné škálovanie a limity, NIE je lineárne usporiadanie.
- $x \succ_K y \;\Leftrightarrow\; x - y \in intK$ (ar, t)

$$\begin{aligned} min \quad & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \succeq_K 0 \end{aligned}$$

Konvexná optimalizácia