Konvexná optimalizácia

Konvexná analýza - množiny

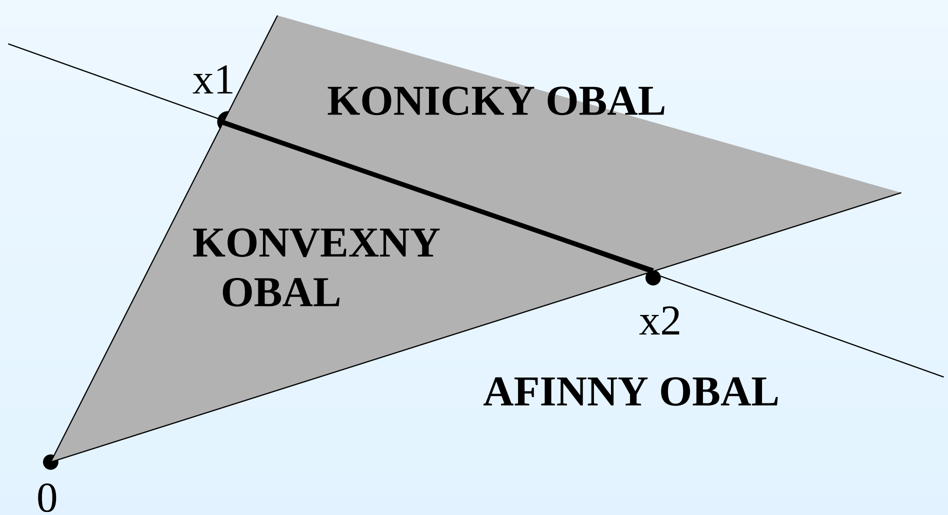
Prednáška druhá: Konvexná analýza - množiny

- Konvexné množiny
- Operácie zachovávajúce konvexnosť
- Separovanie konvexných množín

Prednáška druhá: Konvexná analýza - množiny

$$y = \theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k$$

	$\sum_{i=1}^{k} \theta_k = 1$	$\theta_i \geq 0, \forall i$	
lineárna kombinácia			vektorový podpriestor
afinna kombinácia	$\surd$		afínna množina
kónická kombinácia		$\surd$	konvexný kužel’
konvexná kombinácia	$\surd$	$\surd$	konvexná množina



Príklady konvexných množín

prázdna množina	$\emptyset$
bod	$\{x_0\}$
vektorový priestor	$\mathbb{R}^n$
priamka	$\{x_0 + \alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\},\ v \neq 0$
polpriamka	$\{x_0 + \alpha v \mid \alpha \geq 0\},\ v \neq 0$
úsečka	$\{x_0 + \alpha v \mid \alpha \in [0,1]\},\ v \neq 0$
polpriestor	$\{x \mid a^T x \leq b\}$

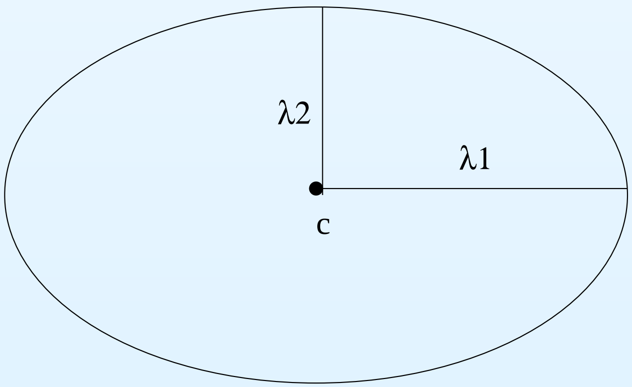
Prednáška druhá: Konvexná analýza - množiny

nadrovina	$\{x \mid a^T x = b\}$
polyedrálna množina	$\{x \mid a_j^T x \le b_j, j = 1, \ldots, m\}$
jednotkový simplex	$\{x \ge 0 \mid \sum_{i=1}^n x_i \le 1\}$
pravdepodobnostný simplex	$\{x \ge 0 \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$
gul'a	$\mathcal{B}(c, r) = \{x \mid \|x - c\| \le r\}$
elipsoid	$\mathcal{E}(c, P) = \{x \mid (x-c)^T P^{-2}(x-c) \le 1\}$

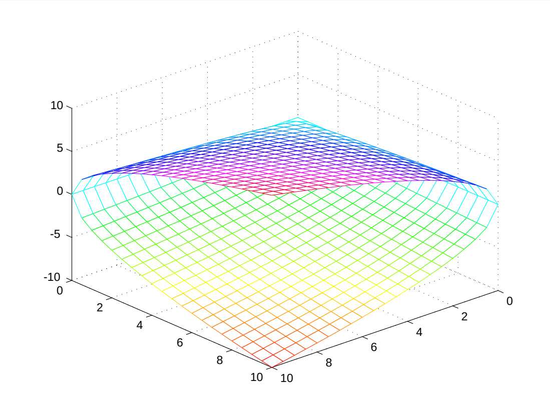
Elipsoid

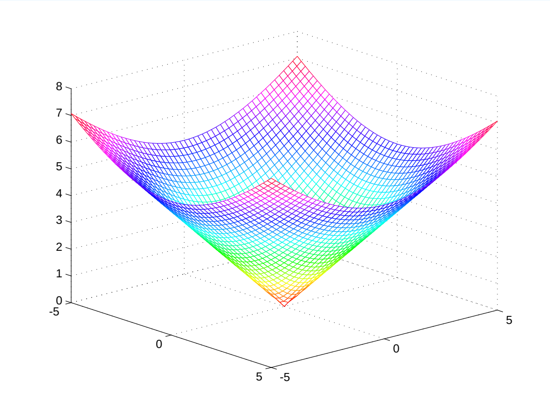
$$\mathcal{E}(c,P) = \{x \mid (x-c)^T P^{-2}(x-c) \le 1\}$$

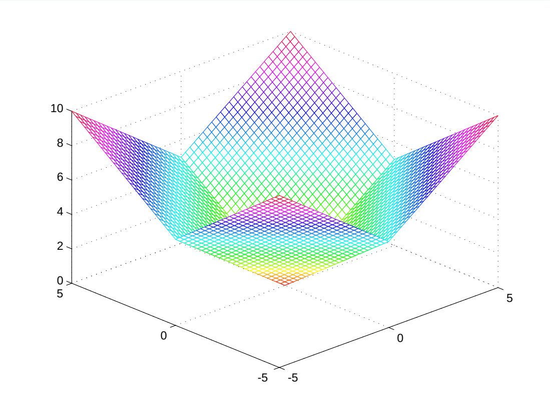
- $P \succ 0,\ P = Q\Lambda Q^T,\ \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$
- λ_i - dĺžky poloosí elipsoidu
- $\mathcal{E}(c, r^2 I) = \mathcal{B}(c,r)$
- Iná reprezentácia: $\mathcal{E}(c,P) = \{c + Au \mid \|u\|_2 \le 1\}$, $P = AA^T$, A - regulárna
- $\mathcal{B}(c,r) = \{c + ru \mid \|u\|_2 \le 1\}$



normový kužel'	$\mathcal{K}_{norm} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq t\}$
kužel' 2. rádu	$\mathcal{K}_2 = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_2 \leq t\}$
množina k.s.d. matíc	$\mathcal{S}^n_+ = \{X \in \mathcal{S}^n \mid z^T X z \geq 0 \; \forall z\}$ $(\mathcal{S}^n = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n}, X = X^T\})$







Operácie zachovávajúce konvexnosť

- prienik $S_1 \cap S_2$, $\bigcap_{\alpha \in A} S_\alpha$
- súčet $S_1 + S_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$
- karteziánsky súčin $S_1 \times S_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}$

- afínna transformácia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ f(x) = Ax + b$

$$f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}, \quad f^{-1}(S) = \{x \mid f(x) \in S\}$$

- perspektíva $P : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}^n$

$$P(x, t) = \frac{x}{t}$$

- lineárna lomená funkcia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$f(x) = \frac{Ax + b}{c^T x + d}, \quad \mathcal{D}(f) = \{x \mid c^T x + d > 0\}$$

Separovanie konvexných množín

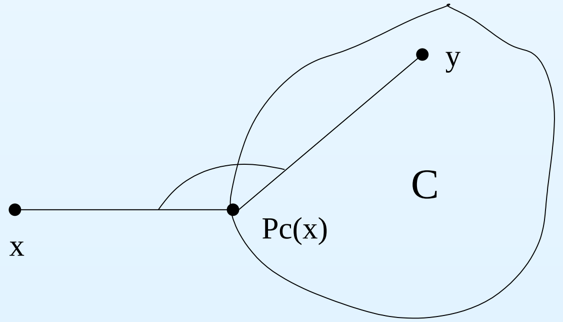
Lema 1. *Nech $C \subseteq \mathbb{R}^n$ je neprázdna, konvexná a uzavretá množina. Potom $\forall x \notin C$ existuje jediný vektor*

$$P_C(x) = \arg\min_{z \in C} \|z - x\|_2$$

a platí

$$(y - P_C(x))^T (x - P_C(x)) \leq 0, \ \forall y \in C.$$

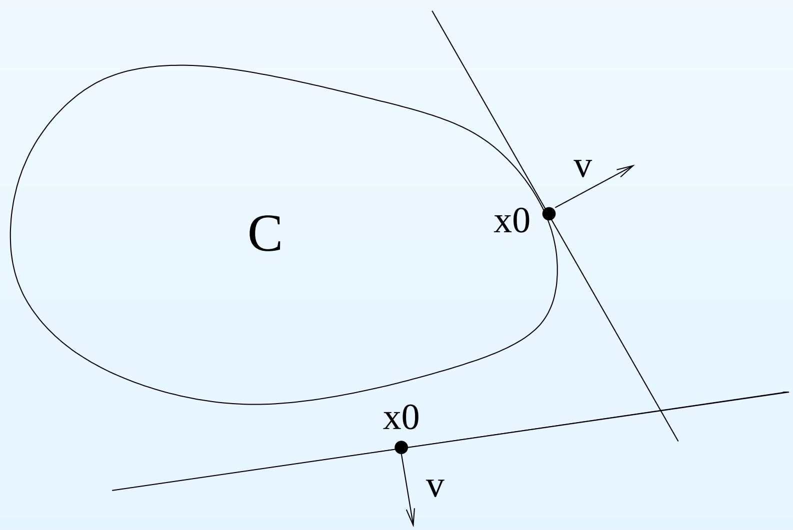
Vektor $P_C(x)$ sa nazýva **projekcia** vektora x na množinu C.



Veta o opornej nadrovine

Veta 1. *Nech* $C \neq \emptyset$ *je konvexná množina a* $x_0 \notin \mathbf{int}(C)$. *Potom existuje vektor* $v \neq 0$ *taký, že*

$$v^T x_0 \geq v^T x, \quad \forall x \in C.$$



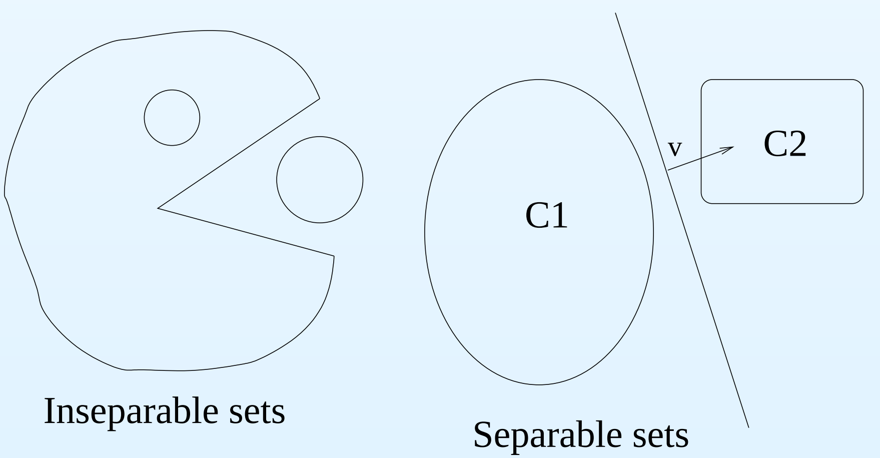
Veta o separovaní konvexných množín

Veta 2. *Nech $\emptyset \neq A, \emptyset \neq B$ sú konvexné množiny, $A \cap B = \emptyset$. Potom existuje vektor $v \neq 0$ taký, že platí implikácia*

$$x \in A,\ y \in B \ \Rightarrow\ v^T x \leq v^T y.$$

Ekvivalentne: existuje vektor $v \neq 0$ a $\gamma \in \mathbb{R}$ tak, že

$$v^T x \leq \gamma,\ \forall x \in A, \qquad v^T y \geq \gamma,\ \forall y \in B.$$



Veta o ostrom separovaní bodu a uzavretej konvexnej množiny

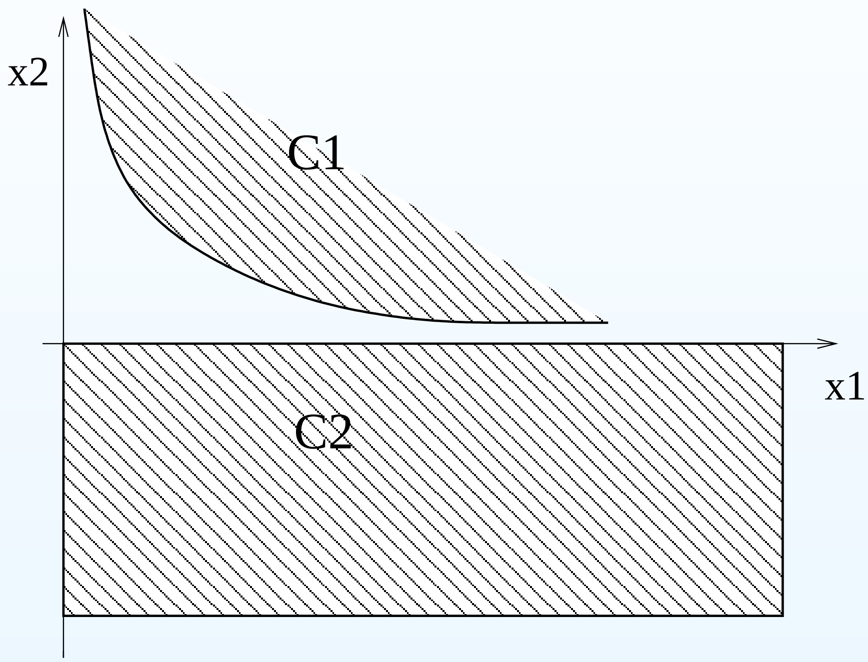
Veta 3. *Nech $C \neq \emptyset$ je konvexná a uzavretá množina a $x_0 \notin C$. Potom existuje vektor $v \neq 0$ a $\gamma \in \mathbb{R}$ tak, že*

$$v^T x_0 < \gamma, \qquad v^T z > \gamma, \, \forall z \in C.$$

Veta o ostrom separovaní dvoch konvexných množín

Veta 4. *Nech $\emptyset \neq A, \emptyset \neq B$ sú uzavreté konvexné množiny, B ohraničená a $A \cap B = \emptyset$. Potom existuje vektor $v \neq 0$ a $\gamma \in \mathbb{R}$ tak, že*

$$v^T x > \gamma, \, \forall x \in A, \qquad v^T y < \gamma, \, \forall y \in B.$$



Konvexné, uzavreté množiny nemusia byť ostro separovateľné

- $C_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 \geq 1\}$
- $C_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 \leq 0\}$

Veta 5. *Nech C je konvexný kužel' a nech $x_0 \notin C$. Potom existuje vektor $v \neq 0$ taký, že*

$$v^T x_0 < 0, \qquad v^T z \geq 0, \forall z \in C.$$