Konvexná optimalizácia

Úlohy konvexnej optimalizácie

Prednáška štvrtá: Úlohy konvexnej optimalizácie

- Základná terminológia
- Formulácia ekvivalentných úloh
- Lokálne a globálne minimum
- Podmienky optimality pre diferencovatel'né funkcie
- Metóda bisekcie na riešenie kvázikonvexných úloh
- Známe triedy konvexnej optimalizácie a vzt'ahy medzi nimi

Úloha konvexného programovania - štandardný tvar

$$\left.\begin{array}{ll} Min & f_0(x) \\ & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, p. \end{array}\right\} \quad (KO)$$

$f_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i = 0, 1, \ldots, m$ - konvexné funkcie
$h_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, p$ - afínne funkcie.

Ak je f_0 kvázikonvexná - **úloha kvázikonvexného programovania**

Množina prípustných riešení:

$$\mathcal{P} = \{x \mid f_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \ldots, p.\}$$

Optimálna hodnota:

$$p^* = \inf\{f_0(x) \mid x \in \mathcal{P}\} \in \mathbb{R} \cup \pm\infty, \quad p^* = +\infty \ \Leftrightarrow\ \mathcal{P} = \emptyset.$$

- Bod $x^* \in \mathcal{P}$ sa nazýva optimálne riešenie úlohy ak
$$f_0(x^*) = p^*, \text{ resp. } f_0(x^*) \leq f_0(x) \; \forall x \in \mathcal{P}.$$
- $\mathcal{P}^*$ - množina optimálnych riešení - konvexná
- Bod $x_\varepsilon \in \mathcal{P}$ sa nazýva ε-suboptimálne riešenie ak
$$f_0(x_\varepsilon) \leq p * +\varepsilon, \text{ resp. } f_0(x_\varepsilon) \leq f_0(x) + \varepsilon, \; \forall x \in \mathcal{P} \quad (\varepsilon > 0).$$
- Lokálne optimálne riešenie $\hat{x} \in \mathcal{P}$ úlohy:
$$\exists r > 0 : \; f_0(\hat{x}) \leq f_0(x), \; \forall x \in \mathcal{P}, \|x - \hat{x}\|_2 \leq r$$

Úloha prípustnosti

Nájsť x: $\quad f_i(x) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m, \quad h_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, p.$

$$\begin{array}{ll} Min & 0 \\ & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, p. \end{array}$$

Formulácia ekvivalentných úloh

- **Transformácia premenných**

  Nech $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je bijektívne zobrazenie. Definujeme

  $$F_i(y) = f_i(\phi(y)),\ i = 0, 1, \ldots, m,\ H_i(y) = h_i(\phi(y)),\ i = 1, \ldots, p$$

  Úloha (KO) je ekvivalentná úlohe

  $$\left.\begin{array}{lll} Min & F_0(y) & \\ & F_i(y) \leq 0, & i = 1, \ldots, m \\ & H_i(y) = 0, & i = 1, \ldots, p. \end{array}\right\} (E1)$$

  x^* je riešením (KO) $\Rightarrow y^* = \phi^{-1}(x^*)$ rieši úlohu (E1)
  y^* je riešením (E1) $\Rightarrow x^* = \phi(y^*)$ rieši úlohu (KO)

Formulácia ekvivalentných úloh

- **Transformácia funkcií**

  Nech $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_m$ sú funkcie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnosťami:
  - ψ_0 - je rastúca, *konvexná*
  - $\psi_i(u)$ - *neklesajúca, konvexná alebo nerastúca, konkávna*
  - $\psi_i(u) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; u \leq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m$

  Definujeme

$$\tilde{f}_i(z) = \psi_i(f_i(x)),\; i = 0, 1, \ldots, m$$

  Úloha (KO) je ekvivalentná úlohe

$$\left.\begin{array}{ll} Min & \tilde{f}_0(x) \\ & \tilde{f}_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, p. \end{array}\right\} (E2)$$

Formulácia ekvivalentných úloh

- **Eliminácia lineárnych ohraničení**

  Uvažujme ohraničenia $h_i(x) = 0,\ i = 1, \ldots, p$ v tvare $Ax = b$ kde $A \in \mathbb{R}^{p\times x}, b \in \mathbb{R}^p$.
  - Ak $b \notin \mathcal{S}(A) \Rightarrow$ úloha je neprípusná.
  - Ak $b \in \mathcal{S}(A) \Rightarrow$ všeobecné riešenie systému $Ax = b$ možno vyjadrit' ako $Fz + x_0$, kde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ je nejaké riešenie $Ax = b$, $F \in \mathbb{R}^{n\times k}$ $(k = n - h(A))$ je matica spĺňajúca $\mathcal{S}(F) = \mathcal{N}(A)$ a $z \in \mathbb{R}^k$ je l'ubovolné.

  Úloha (KO) je ekvivalentná úlohe

$$\left.\begin{array}{ll} Min & f_0(Fz + x_0), \\ & f_i(Fz + x_0) \le 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{array}\right\} (E3)$$

Formulácia ekvivalentných úloh

- **Zavedenie doplnkových premenných**
  - $f_k(x) \le 0 \longrightarrow f_k(x) + s_k = 0, \ s_k \ge 0$
  - aby sa zachovala konvexnost' - f_k predpokladáme afínne.

- **Epigrafová formulácia**

  Úloha (KO) je ekvivalentná úlohe

$$\left.\begin{array}{lll} Min & t & \\ & f_0(x) - t \le 0, & \\ & f_i(x) \le 0, & i = 1, \ldots, m, \\ & h_i(x) = 0, & i = 1, \ldots, p. \end{array}\right\} (E4)$$

Formulácia ekvivalentných úloh

- **Postupná optimalizácia**

  Platí
  $$\inf_{x_1,x_2} f(x_1,x_2) = \inf_{x_1} \inf_{x_2} f(x_1,x_2).$$

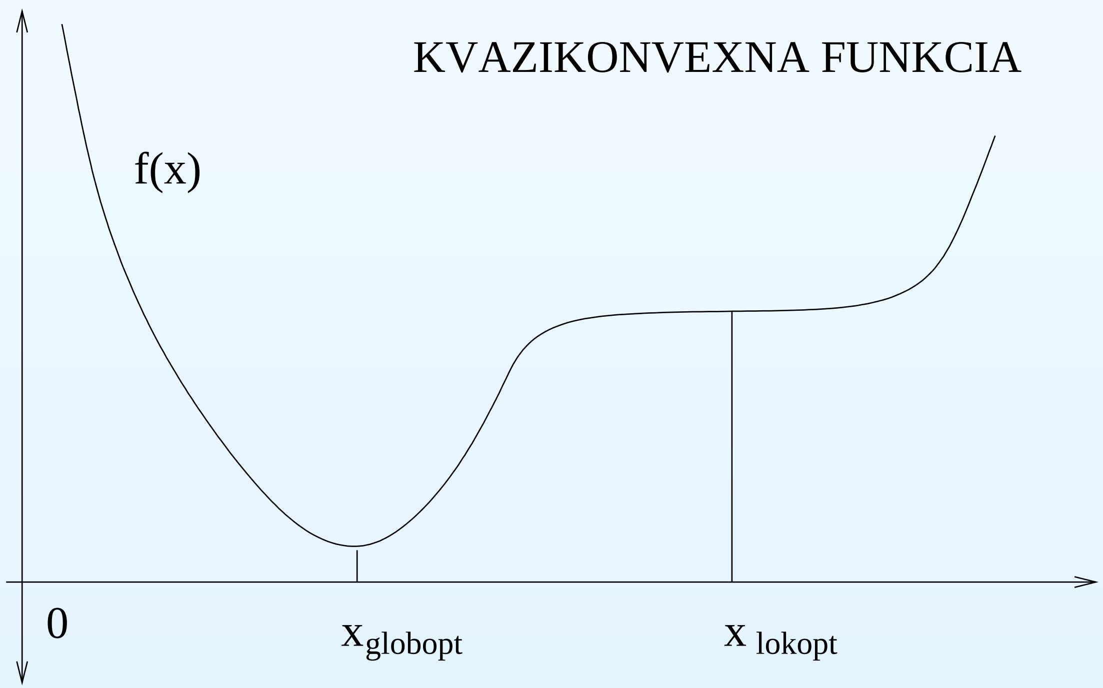
  Nech $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$. Uvažujme úlohu
  $$\begin{array}{ll} Min_{x_1,x_2} & f_0(x_1,x_2) \\ & f_i(x_1) \leq 0, \quad i = 1,\ldots,m \end{array}$$

  Úlohu možno riešit' v dvoch fázach:

  1. $Min_{x_1} f_0(x_1,x_2)$ - môžeme získat' analytické riešenie x_2^*.
  2. $$\begin{array}{ll} Min_{x_1} & f_0(x_1,x_2^*) \\ & f_i(x_1) \leq 0, \quad i = 1,\ldots,m \end{array}$$

Lokálne a globálne minimum

- Každé **lokálne** minimum úlohy (KO) je aj **globálnym** minimom úlohu (KO).
- Neplatí pre úlohy kvázikonvexnej optimalizácie!



Podmienky optimality pre diferencovatel'né funkcie

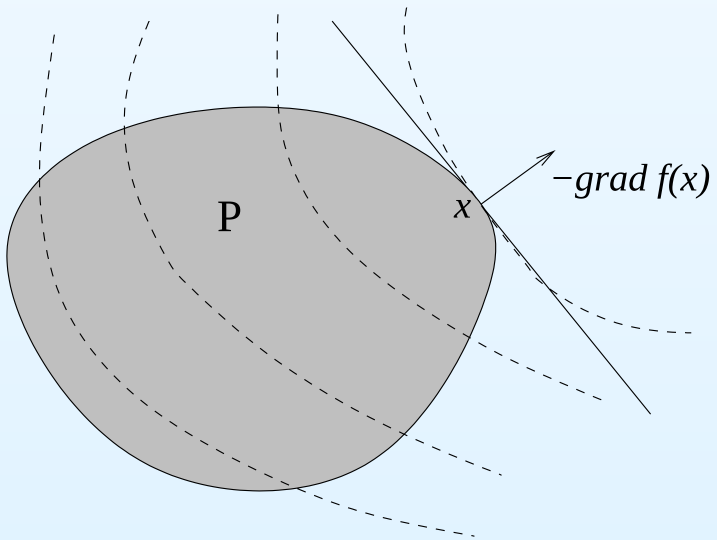
- ak f_0 je konvexná a diferencovatel'ná, tak

$$\forall x, y, \quad x \neq y : f_0(x) \geq f_0(y) + \nabla f_0(y)^T (x - y)$$

- $\hat{x}$ je optimálnym riešením úlohy (KO) $\Leftrightarrow$ $\hat{x} \in \mathcal{P}$ a platí

$$\forall x \in \mathcal{P} \quad \nabla f_0(\hat{x})^T (x - \hat{x}) \geq 0 \qquad (1).$$

- **geometrická interpretácia**: vektor $-\nabla f(\hat{x})$ definuje opornú nadrovinu množiny $\mathcal{P}$ v bode $\hat{x}$



Konvexné úlohy bez ohraničení Podmienka (1) sa redukuje na

$$\nabla f_0(\hat{x}) = 0.$$

Príklad:
Úloha s kvadratickou funkciou $f_0(x) = \frac{1}{2}x^T P x + q^T x + r$. Nutná a postačujúca podmienka optimality je

$$Px + q = 0.$$

- $q \notin \mathcal{S}(P)$ - f_0 je zdola neohraničená - riešenie neexistuje.
- $P \succ 0$ - existuje jediné riešenie $\hat{x} = -P^{-1}q$.
- $P \succeq 0$ - singulárna, $q \in \mathcal{S}(P)$ - množina riešení sa dá vyjadriť ako $\mathcal{P}^* = \{-P^{\dagger}q + \mathcal{N}(P)\}$.

Konvexné úlohy s ohraničeniami typu rovností

- Podmienka (1) má tvar

$$\nabla f_0(\hat{x})^T(x-\hat{x}) \geq 0, \quad \forall x: \; Ax = b$$

- Ľubovolné riešenie systému $Ax = b$ možno vyjadriť ako $x = \hat{x} + \mathcal{N}(A)$. Podmienka (1) má tvar

$$\nabla f_0(\hat{x})^T v = 0, \quad \forall y: \; y \in \mathcal{N}(A) \quad (Ay = 0)$$

  (keďže $\mathcal{N}(A)$ je podpriestor)

- Platí $\nabla f_0(\hat{x}) \in \mathcal{N}(A)^{\perp} = \mathcal{S}(A^T)$. Podmienky optimality pre $\hat{x}$ sú teda

$$\begin{aligned} \exists w \in \mathbb{R}^p : \quad A^T w &= \nabla f_0(\hat{x}), \\ A\hat{x} &= b. \end{aligned}$$

- ak f_0 je **kvázikonvexná** a diferencovatel'ná, tak

$$\forall x, y,\ x \neq y : f_0(x) \leq f_0(y) \ \Rightarrow\ \nabla f_0(y)^T(x-y) \leq 0$$

- **Úloha kvázikonvexnej optimalizácie**: Ak $\hat{x} \in \mathcal{P}$ a

$$\forall x \in \mathcal{P} \quad \nabla f_0(\hat{x})^T(x-\hat{x}) > 0,$$

  tak $\hat{x}$ je optimálne riešenie.

- Pre konvexné úlohy podmienka $\nabla f_0(\hat{x}) = 0$ (spolu s prípustnost'ou) zabezpečuje optimalitu $\hat{x}$. Pre kvázikonvexné úlohy nie!

- Pre konvexné úlohy máme **nutnú a postačujúcu** podmienku, pre kvázikonvexné úlohy máme len **postačujúcu** podmienku.

Riešenie kvázikonvexných úloh pomocou konvexných úloh prípustnosti

Máme úlohu kvázikonvexného programovania

$$\left.\begin{array}{ll} Min & f_0(x) \\ & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & Ax = b, \end{array}\right\} \quad (KKO)$$

t.j. funkcia f_0 je kvázikonvexná a funkcie f_i sú konvexné ($i = 1, \ldots, m$).

- Nech $\phi_t(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, je trieda konvexných funkcií taká, že

$$f_0(x) \leq t \;\Leftrightarrow\; \phi_t(x) \leq 0.$$

a pre pevné x je $\phi_t(x)$ nerastúca v t.

- Napr. $f_0(x) = \frac{c^T x + d}{e^T x + f}$, $\mathcal{D}(f_0) = \{x \mid e^T x + f > 0\}$.

$$\phi_t(x) = c^T x + d - t(e^T x + f)$$

- Nech p^* je optimálna hodnota úlohy (KKO). Uvažujme úlohu prípustnosti:

  Nájsť' x:
  $\phi_t(x) \leq 0,\ f_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m, \quad Ax = b, \qquad (UP)$

  - Ak je úloha prípustná, tak $p^* \leq t$.
  - Ak je úloha neprípustná, tak $p^* \geq t$.

- Predpokladajme, že úloha (KKO) je prípustná a $p^* \in [a, b]$.

METÓDA BISEKCIE PRE KVÁZIKONVEXNÉ ÚLOHY

Vstup:	a, b, tolerancia ε.
Opakuj	1. $t := (a+b)/2$,
	2. Rieš úlohu prípustnosti (UP),
	3. Ak je (UP) prípustná, $b := t$, inak $a := t$,
pokiaľ	$b - a < \varepsilon$.

Na získanie ε-presného riešenia treba vyriešiť

$$N = \left\lceil \log_2 \left(\frac{b-a}{\varepsilon} \right) \right\rceil$$

konvexných úloh prípustnosti.

Zovšeobecnená úloha konvexného programovania:

$$\begin{aligned} Min \quad & f_0(x) \\ & f_i(x) \preceq_{\mathcal{K}_i} 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & Ax = b, \end{aligned}$$

kde $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_i : \mathbb{R}_n \to \mathbb{R}^{n_i}$,

$\mathcal{K}_0 = \mathbb{R}_+, \mathcal{K}_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}, (i = 1, \ldots, m)$ sú (nejaké) vlastné kužele

funkcie $f_i, (i = 0, 1, \ldots, m)$ sú $\mathcal{K}_i$-konvexné.

Ak sú funkcie $f_0, f_1, \ldots, f_m$ lineárne $\Rightarrow$

$\mathcal{K}$	$\mathbb{R}^n_+$	$\mathcal{S}^n_+$	$\mathcal{K}_{\|\cdot\|_2}$
úloha	LP	SDP	SOCP

Známe triedy konvexnej optimalizácie

- Lineárne programovanie
  $c \in \mathbb{R}^n,\ F \in \mathbb{R}^{m\times n},\ g \in \mathbb{R}^m,\ A \in \mathbb{R}^{p\times n},\ b \in \mathbb{R}^p$

$$\left.\begin{array}{ll} Min & c^T x \\ & Fx \le g \\ & Ax = b \end{array}\right\} \quad (LP)$$

- Kvadratické programovanie
  $P_j \in \mathcal{S}^n_+,\ \ q_j \in \mathbb{R}^n,\ r_j \in \mathbb{R},\ j = 0, 1, \ldots, m,\ A \in \mathbb{R}^{p\times n},\ b \in \mathbb{R}^p$

$$\left.\begin{array}{ll} Min & x^T P_0 x + q_0^T x + r_0 \\ & x^T P_i x + q_i^T x + r_i \le 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & Ax = b \end{array}\right\} \quad (QP)$$

- Programovanie nad kužel'mi 2. rádu

  $c \in \mathbb{R}^n,\ F_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n},\ g_i \in \mathbb{R}^{n_i},\ f_i \in \mathbb{R}^n,\ h_i \in \mathbb{R},\ i = i, \ldots, m, A \in \mathbb{R}^{p \times n},\ b \in \mathbb{R}^p$

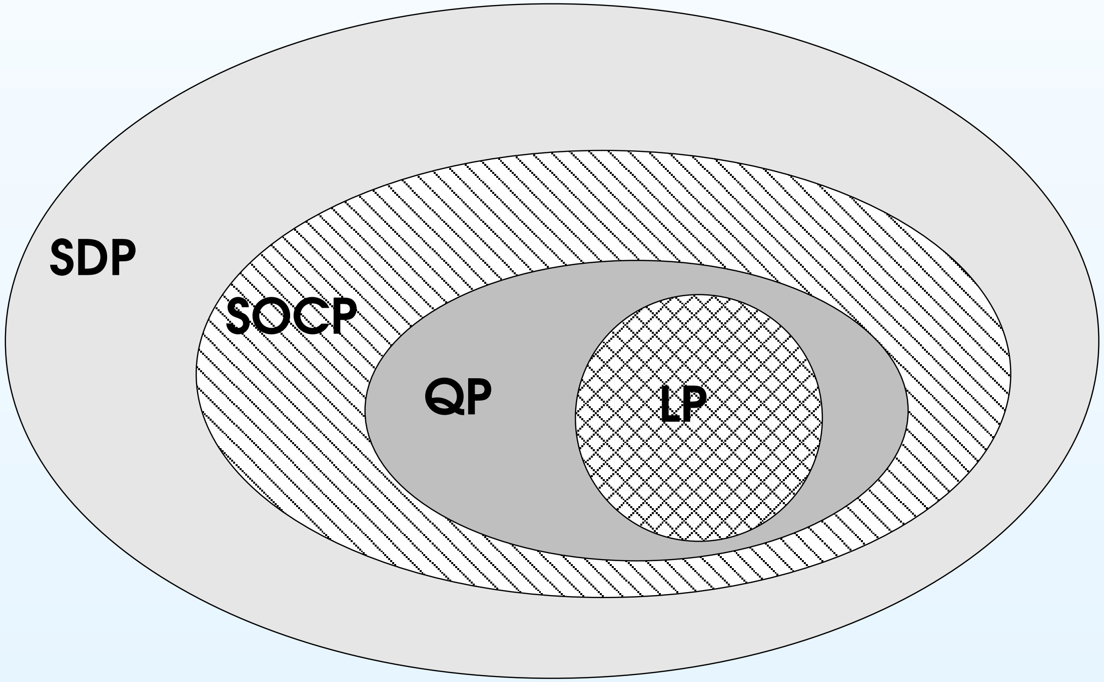
$$\left.\begin{array}{ll} Min & c^T x \\ & \|F_i x + g_i\|_2 \leq f_i^T x + h_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ & Ax = b \end{array}\right\} \quad (SOCP)$$

- Semidefinitné programovanie

  $c \in \mathbb{R}^n,\ F_i \in \mathcal{S}^n,\ i = 1, \ldots, n,\ G \in \mathcal{S}^n,\ A \in \mathbb{R}^{p \times n},\ b \in \mathbb{R}^p$

$$\left.\begin{array}{ll} Min & c^T x \\ & \sum_{i=1}^n F_i x_i \preceq G \\ & Ax = b \end{array}\right\} \quad (SDP)$$

Vzt'ahy medzi niektorými triedami úloh konvexnej optimalizácie



Geometrické programovanie

Funkcia $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{K} c_k x_1^{a_{1k}} x_2^{a_{2k}} \cdots x_n^{a_{nk}},$$

kde $c_k > 0$ a $a_{ik} \in \mathbb{R},\ i = 1, \dots, n,\ k = 1, \dots, K$, sa nazýva **zovšeobecnený kladný polynóm** (pozinóm) stupňa K.

Úloha geometrického programovania

$$\left.\begin{array}{lll} Min & f_0(x) & \\ & f_i(x) \le 1, & i = 1, \dots, m \\ & h_j(x) = 1, & j = 1, \dots, p \end{array}\right\} \quad (GP)$$

kde $f_0, f_1, \dots, f_m$ sú pozinómy stupňa K_i a $h_1, \dots, h_p$ sú pozinómy stupňa 1.

Konvexná formulácia úlohy geometrického programovania

- transformácia premenných - $\phi(x) = (e^{x_1}, \ldots, e^{x_n})$
- transformácia funkcií - $\psi(u) = \ln u$
- $f_i(x) = \sum_{k=1}^{K_i} c_{ki} x_1^{(a_{ik})_1} \ldots x_n^{(a_{ik})_n}$
- $h_j(x) = d_j x_1^{g_{j1}} \ldots x_n^{g_{jn}}$

$$\left.\begin{array}{lll} Min & \tilde{f}_0(x) = \ln\left(\sum_{k=1}^{K_0} e^{a_{0k}^T x + b_{0k}}\right) & \\ & \tilde{f}_i(x) = \ln\left(\sum_{k=1}^{K_i} e^{a_{ik}^T x + b_{ik}}\right) \leq 0, & i = 1, \ldots, m \\ & \tilde{h}_j(x) = g_j^T x + h_j = 0, & j = 1, \ldots, p, \end{array}\right\} \quad (KGP)$$

kde

$a_{ik} = ((a_{ik})_1, \ldots, (a_{ik})_n)$, $g_j = (g_{j1}, \ldots, g_{jn})$, $b_{ki} = \ln c_{ki}$, $h_j = \ln d_j$,
$i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, p$