Konvexná optimalizácia

Dualita v konvexnom programovaní

Úloha konvexného programovania:

$$\begin{aligned} Min \quad & f_0(x) \\ & f_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \qquad\qquad (P) \\ & Ax = b, \end{aligned}$$

Lagrangeova funkcia (prináležiaca úlohe (P)):

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R},$$

$$L(x, u, v) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x) + v^T(Ax - b)$$

u, v - vektory Lagrangeových multiplikátorov (duálne premenné)

Zrejme $\forall x \in \mathcal{P}, \forall u \geq 0$ platí

$$L(x, u, v) \leq f_0(x).$$

Lagrangeova duálna funkcia:

$$G : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$$

$$G(u, v) = \inf_x L(x, u, v) = \inf_x \left[f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x) + v^T(Ax - b) \right]$$

Ked'že $\forall \tilde{x} \in \mathcal{P}$ a $\forall u \geq 0$ platí

$$G(u, v) = \inf_x L(x, u, v) \leq L(\tilde{x}, u, v) \leq f_0(\tilde{x}),$$

tak zrejme

$$G(u, v) \leq p^*$$

- duálna funkcia dáva **dolné ohraničenie** na optimálnu hodnotu p^*

Lagrangeova duálna úloha:

Hľadáme najlepšie dolné ohraničenie na hodnotu p^*:

$$\begin{array}{ll} Max & G(u,v) \\ & u \geq 0 \end{array} \qquad (D)$$

- **optimálne riešenie** - (u^*, v^*) (optimálne Lagrangeove multiplikátory)
- d^* - optimálna hodnota úlohy (D)
- Úloha (D) je vždy konvexná - bez ohľadu na konvexnosť (P).
- **Slabá dualita:** $d^* \leq p^*$ - platí vždy
- $p^* - d^*$ - optimálna duálna medzera

Slaterova podmienka a silná dualita

- **Silná dualita:** $d^* = p^*$
- **Slaterova podmienka (regularita):** existuje vnútorný bod množiny $\mathcal{P}$

$$\exists x: \; f_i(x) < 0, \; i = 1, \dots m, \; Ax = b$$

- stačí zoslabená verzia: ak $f_1, \dots, f_k$ sú afínne:

$$\exists x: \; f_i(x) \leq 0, \; i = 1, \dots k, \; f_i(x) < 0, i = k+1, \dots, m \; Ax = b$$

- Pre úlohy s lineárnymi (afínnymi) ohraničeniami sa Slaterova podmienka rovná požiadavke $\mathcal{P} \neq \emptyset$
- **Veta:** Majme úlohu konvexného porgramovania , pre ktorú je splnená Slaterova podmienka. Potom $d^* = p^*$. Navyše ak $d^* > -\infty$, tak existuje dúalne prípustné (u^*, v^*) tak, že platí $G(u^*, v^*) = d^* = p^*$.

Geometrická interpretácia silnej diality pomocou epigrafov

Definujme množinu $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$:

$$\mathcal{A} = \{(r, s, t) \mid \exists x : \ f_i(x) \le r_i, \ i = 1, \dots, m, \ Ax - b = s, \ f_0(x) \le t\}$$

Pomocou tejto množiny môžeme vyjadriť

- hodnotu p^* ako $p^* = \inf\{t \mid (0, 0, t) \in \mathcal{A}\}$
- hodnotu duálnej funkcie $G(\tilde{u}, \tilde{v})$, pre $\tilde{u} \ge 0$ ako

$$G(\tilde{u}, \tilde{v}) = \inf\{(\tilde{u}, \tilde{v}, 1)^T (r, s, t) \mid (r, s, t) \in \mathcal{A}\}$$

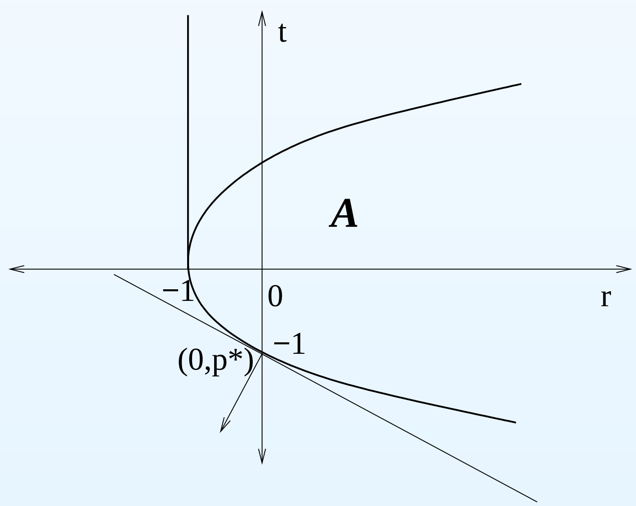
Ak je $G(\tilde{u}, \tilde{v})$ konečné, tak vektor $(\tilde{u}, \tilde{v}, 1)$ a hodnota $G(\tilde{u}, \tilde{v})$ definujú **nevertikálnu** opornú nadrovinu množiny $\mathcal{A}$, lebo

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, 1)^T (r, s, t) \ge G(\tilde{u}, \tilde{v})$$

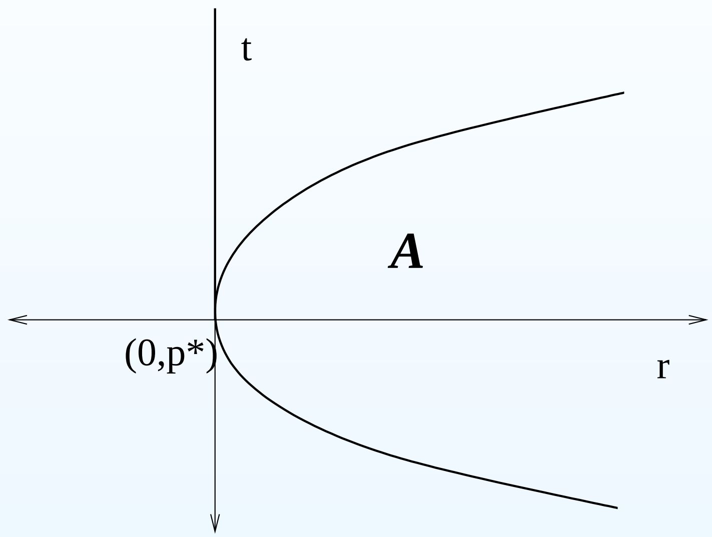
Ked'že $(0, 0, p^*) \in cl(\mathcal{A}) \setminus int(\mathcal{A})$ tak platí

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, 1)^T (0, 0, p^*) = p^* \geq G(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

Silná dualita nastáva, ak existuje nevertikálna oporná nadrovina v bode $(0, 0, p^*)$.



Príklad. $f_0(x) = x$, $f_1(x) = x^2 - 1$. Slaterova podmienka je splnená. $\mathcal{A} = \{(r, s) \mid \exists x : x \leq t, x^2 - 1 \leq r\}$. V bode $(0, p^*) = (0, -1)$ existuje nevertikálna oporná nadrovina množiny $\mathcal{A}$ daná vektorom $(u^*, 1) = (\frac{1}{2}, 1)$.



Príklad. $f_0(x) = x, f_1(x) = x^2$. Slaterova podmienka **nie je** splnená. Množina $\mathcal{A}$ má tvar $\mathcal{A} = \{(r,t) \mid \exists x : x \leq t, x^2 \leq r\}$. V bode $(0, p^*) = (0,0)$ existuje len vertikálna oporná nadrovina množiny $\mathcal{A}$. Optimálna hodnota duálnej úlohy je

$$d^* = \sup\{-\frac{1}{4u} \mid u \geq 0\} = 0 = p^*$$

a teda platí silná dualita, avšak duálne optimum sa nedosahuje.

Dôkaz vety o silnej dualite

- Uvažujeme úlohu (KO), predpokladáme platnosť **Slaterovej podmienky** a $h(A) = p$.
- Ak by $p^* = -\infty$, tak zo slabej duality máme $d^* = -\infty$.
- Predpokladajme, že p^* je konečná hodnota.
- Uvažujme množiny

$$\mathcal{A} = \{(r, s, t) | \exists x : f_i(x) \le r_i, i = 1, \ldots, m, Ax - b = s, f_0(x) \le t\},$$

$$\mathcal{B} = \{(0, 0, q) \mid \exists x : \; q < p^*\}.$$

- $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset \Rightarrow$ existuje **deliaca nadrovina** daná vektorom $(\tilde{u}, \tilde{v}, \mu) \neq 0_{m+p+1}$ a konštantou $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Platí teda

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \mu)^T (r, s, t) = \tilde{u}^T r + \tilde{v}^T s + \mu t \ge \alpha \quad \forall (r, s, t) \in \mathcal{A},$$

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \mu)^T (0, 0, q) = \mu q \le \alpha \quad \forall (0, 0, q) \in \mathcal{B}$$

- Zrejme $\tilde{u} \geq 0, \mu \geq 0$ - inak by $\tilde{u}^T r + \mu t$ bolo zdola neohraničené na $\mathcal{A}$.
- Teda $\forall x$ platí

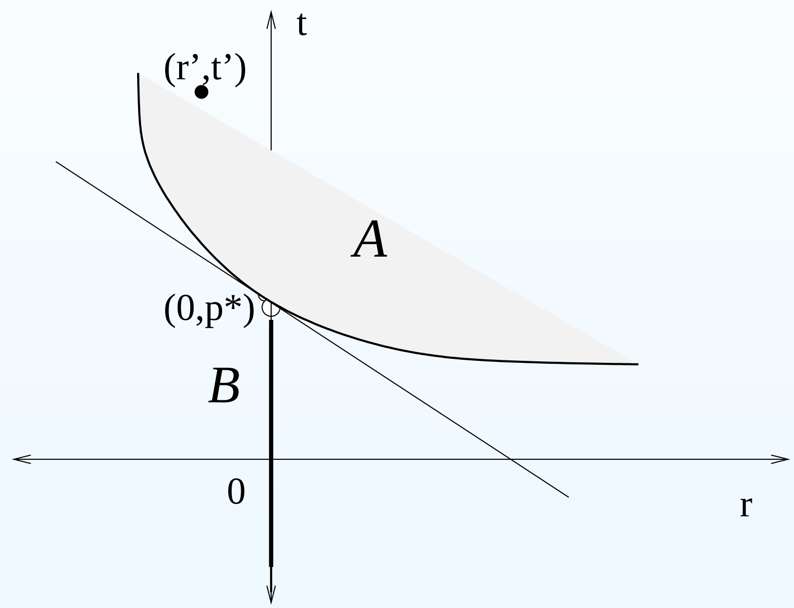
$$\sum_{i=1}^m \tilde{u}_i f_i(x) + \tilde{v}^T (Ax - b) + \mu f_0(x) \geq \alpha \geq \mu p^*$$

- Prípad $\mu > 0$.
  Zrejme $L(x, \tilde{u}/\mu, \tilde{v}/\mu) \geq p^*$ a teda aj

$$\inf_x L(x, \tilde{u}/\mu, \tilde{v}/\mu) = G(\tilde{u}/\mu, \tilde{v}/\mu) \geq p^*.$$

  Zo slabej duality vyplýva $G(\tilde{u}/\mu, \tilde{v}/\mu) = p^*$.
- Prípad $\mu = 0$.
  Platí $\sum_{i=1}^m \tilde{u}_i f_i(x) + \tilde{v}^T (Ax - b) \geq 0$. Zo Slaterovej podmienky dostávame $\tilde{u} = 0$. Teda platí $\tilde{v}^T (Ax - b) \geq 0$. Zo Slaterovej podmienky a predpokladu maximálnej hodnosti A dostávame, že to nemôže nastat'.

(QED)



Ilustrácia Slaterovej podmienky a silnej duality.
Množina $\mathcal{A}$ je vyznačená sivou, množina $\mathcal{B}$ je polpriamka bez počiatočného bodu $(0, p^*)$. Obe množiny sú konvexné a disjunktné a teda je možné ich oddelit' nadrovinou. Slaterova podmienka zaručuje, že táto nadrovina je nevertikálna.

Dualita a sedlový bod Lagrangeovej funkcie

- $$L(x,u,v) = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x) + v^T(Ax - b)$$

- $$\sup_{u\geq 0, v} L(x,u,v) = \begin{cases} f_0(x) & x \in \mathcal{P} \\ \infty & \text{inak} \end{cases}$$

- Optimálnu hodnotu úlohy (P) možno vyjadriť ako

$$p^* = \inf_x \sup_{u\geq 0, v} L(x,u,v).$$

- Z definície duálnej funkcie máme

$$d^* = \sup_{u\geq 0, v} \inf_x L(x,u,v).$$

Dualita a sedlový bod Lagrangeovej funkcie

Platí všeobecne:
Ak $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^p$ je sedlový bod (typu min-max) Lagrangeovej funkcie t. j.

$$\forall x,\ u \geq 0,\ v:\ L(\hat{x}, u, v) \leq L(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v}) \leq L(x, \hat{u}, \hat{v}),$$

potom $\hat{x}$ je optimálne riešenie (P) a $(\hat{u}, \hat{v})$ je optimálne riešenie (D).

Platí pre konvexné úlohy:
Ak je splanená Slaterova podmienka a $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ je optimálne riešenie (P), tak existuje $(\hat{u}, \hat{v}) \in \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^p$ také, že $(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v})$ je sedlový bod (typu min-max) Lagrangeovej funkcie.

Zrejme potom $p^* = f_0(\hat{x}) = L(\hat{x}, \hat{u}, \hat{v}) = G(\hat{u}, \hat{v}) = d^*.$

Kritérium suboptimality

- Každý duálne prípusný bod $(u, v),\ u \geq 0$ nám povie ako suboptimálny je daný prípusný bod $x \in \mathcal{P}$ bez toho, aby sme poznali p^*:

$$f_0(x) - p^* \leq f_0(x) - G(u, v) := \varepsilon$$

  a tiež interval

$$p^* \in [G(u, v), f_0(x)], \quad d^* \in [G(u, v), f_0(x)]$$

- **Kritérium pre zastavenie algoritmu:** ak algoritmus generuje postupnost' $x^k \in \mathcal{P}$ a $(u^k, v^k), u^k \geq 0$, tak podmienka

$$f_0(x^k) - G(u^k, v^k) \leq \varepsilon$$

  garantuje, že ked' algoritmus skončí, tak x^k je ε-suboptimálne.

Podmienka pre zabezpečenie relatívnej presnosti $\varepsilon_{rel} > 0$:

Ak

$$G(u^k, v^k) > 0, \quad \frac{f_0(x^k) - G(u^k, v^k)}{G(u^k, v^k)} \leq \varepsilon_{rel}$$

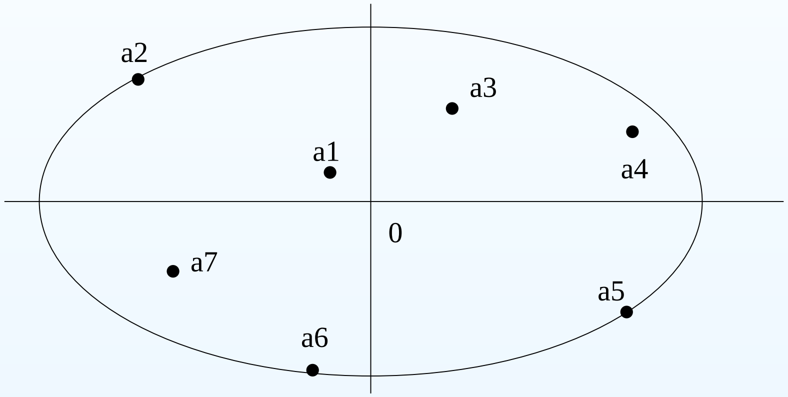
alebo

$$f_0(x^k) < 0, \quad \frac{f_0(x^k) - G(u^k, v^k)}{-f_0(x^k)} \leq \varepsilon_{rel},$$

tak $p^* \neq 0$ a máme zaručené, že relatívna chyba

$$\frac{f_0(x^k) - p^*}{|p^*|} \leq \varepsilon_{rel}.$$

Príklad: Dané sú body $a_1, \ldots, a_m$. Úlohou je nájsť' elipsoid centrovaný v 0 s čo najmenším objemom, obsahujúci všetky body $a_1, \ldots, a_m$.



- Uvažujme elipsoid $\mathcal{E}_X = \{z \mid z^T X z \leq 1\}$.
- Objem elipsoidu: $\frac{4}{3}\pi\sqrt{\det X^{-1}}$
- Konvexná formulácia úlohy:

$$\left.\begin{array}{ll} Min & \ln\det X^{-1} \\ & a_i^T X a_i \leq 1 \quad i = 1, \ldots, m \end{array}\right\} (P)$$

- $a_i^T X a_i = \mathrm{tr}(X a_i a_i^T) = \mathrm{tr}(X A_i),\ \ A_i = a_i a_i^T \in \mathcal{S}_+^n$
- $X \bullet Y = \mathrm{tr}(XY)$ je skalárny súčin na $\mathcal{S}^n$
- **Lagrangeova funkcia:**

$$L(X,u) = \ln\det X^{-1} + \textstyle\sum_{i=1}^m u_i(\mathrm{tr}(XA_i) - 1) =$$

$$\ln\det X^{-1} + X \bullet (\textstyle\sum_{i=1}^m u_i A_i) - u^T \mathbf{1}$$

- $\nabla_X L(X,u) = -X^{-1} + \sum_{i=1}^m u_i A_i$
- **Lagrangeova duálna funkcia:**

$$G(u) = \inf_X L(X,u) = \begin{cases} \ln\det(\sum_{i=1}^m u_i A_i) + n - u^T\mathbf{1} & \sum_{i=1}^m u_i A_i \succ 0 \\ -\infty & \text{inak} \end{cases}$$

- Pre ľubovolné $\bar{u} \geq 0$ je hodnota

  $$\ln\det\left(\sum_{i=1}^{m} \bar{u}_i A_i\right) + n - \bar{u}^T \mathbf{1}$$

  dolným ohraničením na optimálnu hodnotu p^*.

- **Duálna úloha:**

  $$\left.\begin{array}{ll} Max & \ln\det\left(\sum_{i=1}^{m} u_i A_i\right) + n - u^T \mathbf{1} \\ & u \geq 0, \end{array}\right\} \quad (D)$$

  pričom $\sum_{i=1}^{m} u_i A_i \succ 0$ je ohraničenie dané implicitne definičným oborom účelovej funkcie

- **Slaterova podmienka**

  $$\exists X \succ 0 : \quad a_i^T X a_i \leq 1, \; i = 1, \ldots, m$$

  je vždy splnená. Stačí vziať $X = \frac{1}{\alpha} I$, kde $\alpha = \max_i \{\|a_i\|_2^2\}$.

- Predpokladajme, že $a_1, \ldots, a_m$ generujú $\mathbb{R}^n$ - úloha (P) je ohraničená
- Z predpokladu tiež vyplýva, že $\sum_{i=1}^m a_i a_i^T = \sum_{i=1}^m A_i \succ 0$. Z vlastnosti Schurovho doplnku máme, že $\bar{X} = \left(\sum_{i=1}^m a_i a_i\right)^{-1}$ je prípustné riešenie.
- Pomocou duálnej úlohy určíme úroveň suboptimality $\bar{X}$.
- Aby sme ju analyticky určili, uvažujeme v duálnej úlohe (D) zúženie na premenné $t\mathbf{1} \in \mathbb{R}^m,\ t > 0$.
- $$g(t) = G(t\mathbf{1}) = \ln\det\left(\sum_{i=1}^m A_i\right) + n\ln t + n - tm$$
- $g(t)$ je konkávna, $g'(t) = 0 \ \Leftrightarrow\ t = \frac{n}{m}$

- Označme $\bar{u} = \frac{n}{m}\mathbf{1}$. Potom

$$g(\tfrac{n}{m}) = G(\bar{u}) = \ln\det\left(\sum_{i=1}^{m} A_i\right) + n\ln\tfrac{n}{m}$$

- Duálna medzera $G(\bar{u}) - f_0(\bar{X}) = n\ln\frac{n}{m}$
- Teda $\bar{X}$ je najviac $n\ln\frac{n}{m}$ suboptimálne riešenie.
- Pre objem elipsoidu platí

$$V(\mathcal{E}_{\bar{X}}) \leq (n/m)^{\frac{n}{2}} V^*,$$

  kde V^* je objem minimálneho elipsoidu
- Ak $m = n$, tak duálna medzera je nulová - $\bar{X}$ je **optimálne riešenie**!!

Príklad: Maximalizácia entropie

$$\left.\begin{array}{ll} Min & f_0(x) = \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i \\ & Ax \leq b \\ & \mathbf{1}^T x = 1 \end{array}\right\} (P), \quad \mathcal{D}(f_0) = \mathbb{R}^n_{++}$$

- $L(x,u,v) = \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i + u^T(Ax - b) + v(\mathbf{1}^T x - 1)$
- Duálna úloha

$$\left.\begin{array}{ll} Max & G(u,v) = -b^T u - v - e^{-v-1} \sum_{i=1}^n e^{-(A^T u)_i} \\ & u \geq 0 \end{array}\right\} (D)$$

- Úloha sa dá zjednodušit' minimalizáciou cez vol'nú premennú v:

$$\left.\begin{array}{ll} Max & G(u) = -b^T u - \ln\left(\sum_{i=1}^n e^{-(A^T u)_i}\right) \\ & u \geq 0 \end{array}\right\} (D)$$

Riešenie primárnej úlohy pomocou duálnej:

- Ak je splnená Saterova podmienka,
$$(\exists x > 0 : \; Ax \le b, \mathbf{1}^T x = 1)$$
tak $d^* = p^*$ a duálne optimum sa nadobúda.
- Nech (u^*, v^*) je známe riešenie duálnej úlohy.
- Lagrangeova funkcia
$$L(x, u^*, v^*) = \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i + (u^*)^T (Ax - b) + v^* (\mathbf{1}^T x - 1)$$
je rýdzo konvexná a zdola ohraničená - jedniné minimum je dané
$$x_i^* = e^{-1 - v^* - (A^T u^*)_i}$$
- $x^* \in \mathcal{P}$ - je to optimálne riešenie (P)
- $x^* \notin \mathcal{P}$ - optimálne riešenie sa nenadobúda

Príklad: Konvexné a nekonvexné kvadratické programovanie

- Uvažujme **konvexnú** kvadratickú úlohu:

$$\left.\begin{array}{ll} Min & f_0(x) = x^T A_0 x + 2b_0^T x + c_0 \\ & f_1(x) = x^T A_1 x + 2b_1^T x + c_1 \le 0 \end{array}\right\} \quad (P)$$

  kde $A_0 \succ 0, A_1 \succeq 0,\ b_0, b_1 \in \mathbb{R}^n,\ c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

- **Lagrangeova funckia:**

$$L(x,u) = x^T(A_0 + uA_1)x + 2(b_0 + ub_1)^T x + (c_0 + uc_1)$$

-

$$\nabla_x L(x,u) = 2(A_0 + uA_1)x + 2(b_0 + ub_1) = 0 \iff$$

$$x = -(A_0 + uA_1)^{-1}(b_0 + ub_1)$$

- Duálna funkcia:

$$G(u) = \inf_x L(x,u) =$$
$$-(b_0 + ub_1)^T (A_0 + uA_1)^{-1} (b_0 + ub_1) + (c_0 + uc_1)$$

- **Duálna úloha:**

$$\left.\begin{array}{ll} Max & -(b_0 + ub_1)^T (A_0 + uA_1)^{-1} (b_0 + ub_1) + (c_0 + uc_1) \\ & u \geq 0 \end{array}\right\} (D)$$

- Semidefinitná formulácia:

$$\left.\begin{array}{ll} Max & t \\ & \begin{pmatrix} c_0 + uc_1 - t & (b_0 + ub_1)^T \\ b_0 + ub_1 & A_0 + uA_1 \end{pmatrix} \succeq 0 \end{array}\right\} (D)$$

- Uvažujme **nekonvexnú** kvadratickú úlohu:

$$\left.\begin{array}{ll} Min & f_0(x) = x^T A_0 x + 2b_0^T x + c_0 \\ & f_1(x) = x^T A_1 x + 2b_1^T x + c_1 \leq 0 \end{array}\right\} (P)$$

  kde $A_0, A_1 \not\succeq 0,\ b_0, b_1 \in \mathbb{R}^n,\ c_0, c_1 \in \mathbb{R}$.

- Opäť $L(x,u) = x^T(A_0 + uA_1)x + 2(b_0 + ub_1)^T x + (c_0 + uc_1)$

- Ak $A_0 + uA_1 \succeq 0$ a $b_0 + ub_1 \in \mathcal{S}(A_0 + uA_1)$ tak

$$x = -(A_0 + uA_1)^\dagger (b_0 + ub_1),$$

  minimalizuje $L(x,u)$.

Duálna funkcia:

$$G(u) = \inf_x L(x,u) = $$
$$\begin{cases} -(b_0 + ub_1)^T (A_0 + uA_1)^\dagger (b_0 + ub_1) + (c_0 + uc_1) & A_0 + uA_1 \succeq 0, \\ & b_0 + ub_1 \in \mathcal{S}(A_0 + uA_1) \\ -\infty & \text{inak} \end{cases}$$

Duálna úloha:

$$\left.\begin{array}{ll} Max & -(b_0 + ub_1)^T (A_0 + uA_1)^\dagger (b_0 + ub_1) + (c_0 + uc_1) \\ & A_0 + uA_1 \succeq 0, \\ & b_0 + ub_1 \in \mathcal{S}(A_0 + uA_1) \\ & u \geq 0 \end{array}\right\} (D)$$

Zovšeobecnenie vety o Schurovom doplnku:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix} \succeq 0 \;\Leftrightarrow\; A \succeq 0,\; C - B^T A^\dagger B \succeq 0,\; \mathcal{S}(B) \subseteq \mathcal{S}(A)$$

- Ak $A \succ 0$ tak $A^\dagger = A^{-1}$ a $\mathcal{S}(B) \subseteq \mathcal{S}(A)$ je triviálne splnené.
- $\mathcal{S}(B) \subseteq \mathcal{S}(A)$ je ekvivalentné podmienke $(I - AA^\dagger)B = 0$.
- $\mathcal{S}(B) \subseteq \mathcal{S}(A)$ implikuje jednoznačnosť zovšeobecneného Schurovho doplnku $C - B^T A^\dagger B$.

Platí

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -B^T A^\dagger & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -A^\dagger B \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & (I - AA^\dagger)B \\ B^T(I - AA^\dagger) & C - B^T A^\dagger B \end{bmatrix}$$

Semidefinitná formulácia úlohy (D):

$$\left.\begin{array}{ll} Max & t \\ & \begin{pmatrix} c_0 + uc_1 - t & (b_0 + ub_1)^T \\ b_0 + ub_1 & A_0 + uA_1 \end{pmatrix} \succeq 0 \\ & u \geq 0 \end{array}\right\} (D)$$

- Je to úloha semidefinitná a teda konvexná.
- Navyše pre kvadratické úlohy (aj nekonvexné) platí silná dualita za predpokladu splnenia Slaterovej podmienky - v našom prípade

$$\exists x : \; x^T A_1 x + 2b_1^T x + c_1 < 0.$$

DUALITA A VETY O ALTERNATÍVACH

Farkasova lema: Platí práve jedna z alternatív:

$$\begin{array}{lll} I. & \exists x: & Ax \leq 0,\ c^T x < 0 \\ II. & \exists y: & A^T y + c = 0,\ y \geq 0 \end{array}$$

Uvažujme dvojicu duálnych úloh LP:

$$\left.\begin{array}{ll} Min & c^T x \\ & Ax \leq 0 \end{array}\right\} (P) \qquad \left.\begin{array}{ll} Max & 0 \\ & A^T y + c = 0 \\ & y \geq 0 \end{array}\right\} (D)$$

Ak systém I. **je** riešiteľný, tak $p^* = -\infty = d^*$ (silná dualita) a teda systém II. nie je riešiteľný.
Ak systém I. **nie je** riešiteľný, tak $p^* = 0 = d^*$ (lebo je splnená Slaterova podmienka a duálne optimum sa nadobúda) a teda systém II. má riešenie.

Predpokladáme: $f_1, \ldots, f_m$ sú konvexné a $b \in \mathcal{S}(A)$.

Platí práve jedna z alternatív:

$$\begin{array}{lll} I. & \exists x: & f_i(x) < 0, i = 1, \ldots, m, \ Ax = b, \\ II. & \exists u \geq 0, u \neq 0: & G(u, v) \geq 0, \end{array}$$

kde $G(u, v)$ je Lagrangeova duálna funkcia k úlohe prípustnosti

$$\left.\begin{array}{ll} Min & 0 \\ & f_i(x) \leq 0, \ i = 1, \ldots, m \\ & Ax = b, \end{array}\right\}$$

t. j.

$$G(u, v) = \inf_x \sum_{i=1}^m u_i f_i(x) + v^T (Ax - b).$$

Uvažujme úlohu:

$$\left.\begin{array}{ll} Min & s \\ & f_i(x) \leq s,\ i = 1, \ldots, m \\ & Ax = b, \end{array}\right\} \quad (Ps)$$

s optimálnou hodnotou p^*. Systém I. je riešitel'ný $\Leftrightarrow p^* < 0$.
Lagrangeova funkcia úlohy (Ps) je

$$L(x, s, u, v) = s(1 - \mathbf{1}^T u) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x) + v^T (Ax - b).$$

$$\inf_{x,s} L(x, s, u, v) = \begin{cases} G(u, v) & \mathbf{1}^T u = 1 \\ -\infty & \text{inak} \end{cases}$$

Duálna úloha:

$$\left.\begin{array}{ll} Max & G(u,v) \\ & \mathbf{1}^T u = 1, \\ & u \geq 0 \end{array}\right\}$$

- Slaterova podmienka je za daných predpokladov splnená $\Rightarrow$ platí $d^* = p^*$ a duálne optimum sa nadobúda.
- Ak systém I. nie je riešitel'ný $\Rightarrow$ $p^* \geq 0 \Rightarrow (u^*, v^*)$ rieši systém II.
- Ak systém I. je riešitel'ný $\Rightarrow$ z vlastností funkcie $G(u,v)$ vyplýva riešitel'nost' II.

Podobne sa dá ukázat': ak $b \in \mathcal{S}(A)$ a optimálna hodnota p^* sa nadobúda, tak platí práve jedna z alternatív:

$$\begin{array}{lll} I. & \exists x : & f_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m, \;\; Ax = b, \\ II. & \exists u \geq 0 : & G(u,v) > 0, \end{array}$$

Zovšeobecnené nerovnosti a dualita na príklade semidefinitného programovania

Dané sú $b \in \mathbb{R}^n,\ A_1, \ldots, A_n, C \in \mathcal{S}^m$. Uvažujme úlohu SDP:

$$\left.\begin{array}{ll} Min & b^T x \\ & \sum_{i=1}^n x_i A_i + C \preceq 0 \end{array}\right\} (P)$$

Lagrangeova funkcia:

$$L(x, Y) = b^T x + Y \bullet \left(\sum_{i=1}^n x_i A_i + C \right) = \sum_{i=1}^n x_i (b_i + Y \bullet A_i) + Y \bullet C,$$

kde $Y \in \mathcal{S}^m$, a pre $U, V \in \mathcal{S}^m :\ U \bullet V = \mathrm{tr}(UV)$.

$$x \in \mathcal{P}, Y \succeq 0 \ \Rightarrow\ L(x, Y) \leq b^T x$$

Lagrangeova duálna funkcia:

$$G(Y) = \inf_x L(x, Y) = \begin{cases} Y \bullet C & b_i + Y \bullet A_i = 0, \ i = 1, \ldots, n \\ -\infty & \text{inak} \end{cases}$$

Slabá dualita: $\forall Y \succeq 0 : \ G(Y) \leq p^*$

Duálna úloha:

$$\left.\begin{array}{ll} Max & Y \bullet C \\ & b_i + Y \bullet A_i = 0, \ i = 1, \ldots, n \\ & Y \succeq 0 \end{array}\right\} \ (D)$$

Slaterova podmienka:

$$\exists x : \ \sum_{i=1}^{n} x_i A_i + C \prec 0$$