

Konvexná optimalizácia

Aplikácie konvexnej optimalizácie

MARKOWITZOVO PORTFÓLIO via QP a SDP

(Motivačný príklad z prvej prednášky)

n	počet aktív
x_i	(relatívne) množstvo aktíva i ($i = 1, 2, \dots, n$)
p_i	výnos aktíva i
$\bar{p} = E(p)$	očakávaný výnos
$\Sigma = E((p - \bar{p})(p - \bar{p})^T)$	kovariančná matica výnosov
$x^T \Sigma x$	variancia portfólia x - miera rizika

Klasická úloha:

$$\begin{aligned} \text{Min}_x \quad & x^T \Sigma x \\ & \bar{p}^T x \geq r_{\min} \\ & \mathbf{1}^T x = 1, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie

CVX kód:

```
cvx_begin
    variable x(n)
    minimize (x'*Sigma*x) % alebo quad_form(x,Sigma)
    subject to
        sum(x)==1;
        x>=0;
        p'*x>=rmin;
cvx_end
```

Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie

Majme dané dáta ($n = 4$):

- $p = [0.12; 0.1; 0.07; 0.03]$
- $\Sigma = \begin{bmatrix} 0.4260 & 0.0792 & -0.1040 & 0.0048 \\ 0.0792 & 0.1325 & -0.0080 & 0.0402 \\ -0.1040 & -0.0080 & 0.1700 & 0.000 \\ 0.0048 & 0.0402 & 0.000 & 0.1060 \end{bmatrix}$
- $r_{min} = 0.05$

Výstup:

- $x^* = [0.1558; 0.1484; 0.3546; 0.3412]$
- variancia $V^* = 0.0428852$

Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie

Predpokladajme, že x je dané ale máme len čiastkovú informáciu o kovariančnej matici Σ :

- $L_{ij} \leq \Sigma_{ij} \leq U_{ij}, i, j = 1, \dots, n$
- Σ_{ii} sú dané, ale máme len čiastkovú informáciu o $\Sigma_{ij}, i \neq j$ (napr. znamienko)

Hľadáme "najhoršie možné riziko" vrámci daných ohraničení - riešením nasledujúcej SDP úlohy v premennej Σ :

$$\begin{aligned} \text{Max}_x \quad & x^T \Sigma x = \Sigma \bullet (xx^T) \\ & L_{ij} \leq \Sigma_{ij} \leq U_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n \\ & \mathbf{1}^T x = 1, \\ & \Sigma \succeq 0 \end{aligned}$$

Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie

CVX kód:

```
cvx_begin
    variable Sigma(n,n) symmetric
    maximize (x' * Sigma * x)
    subject to
        Sigma == semidefinite(n);
        Sigma >= L;
        Sigma <= U;
cvx_end
```

Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie

Majme dané:

- $x = [0.1558; 0.1484; 0.3546; 0.3412]$
- $L = \begin{bmatrix} 0.4260 & 0.0292 & -0.1540 & -0.0452 \\ 0.0292 & 0.1325 & -0.0580 & -0.0098 \\ -0.1540 & -0.0580 & 0.1700 & -0.0500 \\ -0.0452 & -0.0098 & -0.0500 & 0.1060 \end{bmatrix}$
- $U = \begin{bmatrix} 0.4260 & 0.1292 & -0.0540 & 0.0548 \\ 0.1292 & 0.1325 & 0.0420 & 0.0902 \\ -0.0540 & 0.0420 & 0.1700 & 0.0500 \\ 0.0548 & 0.0902 & 0.0500 & 0.1060 \end{bmatrix}$

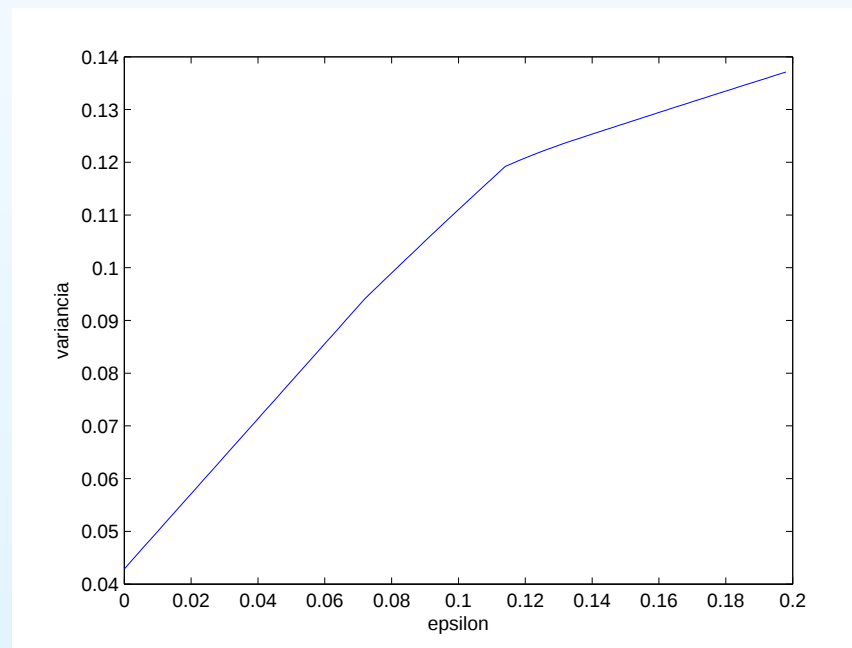
Výstup:

- variancia $V^* = 0.0784624$

Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie

"Najhoršie možné riziko" (worst-case variance) pre

- $L = \Sigma - \varepsilon \mathbf{1}_{n \times n} + \varepsilon I;$
- $U = \Sigma + \varepsilon \mathbf{1}_{n \times n} - \varepsilon I;$
- $0 \leq \varepsilon \leq 0.2$



BIKRITERIÁLNA OPTIMALIZÁCIA

- F_1, F_2 sú konvexné funkcie, $\mathcal{P}$ je konvexná množina prípustných riešení

- $$\left. \begin{array}{l} \text{Min} \\ x \in \mathcal{P} \end{array} (F_1(x), F_2(x)) \right\} (BiO)$$

- x_{po} je **pareto optimálny**, ak $\forall x \in \mathcal{P}$ platí

$$F_i(x) \leq F_i(x_{po}), i = 1, 2 \Rightarrow F_i(x) = F_i(x_{po}), i = 1, 2.$$

- **trade-off** krivka - množina pareto optimálnych hodnôt
- "skalarizácia": $\text{Min } \alpha F_1(x) + \beta F_2(x)$, $\alpha > 0, \beta > 0$ sú váhy pridelené F_1, F_2
- $\text{Min } F_1(x) + \gamma F_2(x)$, $\gamma = \beta/\alpha$ je relatívna váha F_2 k F_1
- $\forall 0 < \gamma < \infty$ je riešenie úlohy pareto optimálnym bodom úlohy (BiO)

Opäť Markowitzovo portfólio:

Uvažujme úlohu bikriteriálnej optimalizácie

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min} \quad (-\bar{p}^T x, x^T \Sigma x) \\ \mathbf{1}^T x = 1 \\ x \geq 0 \end{array} \right\}$$

resp. jej skalárnu verziu

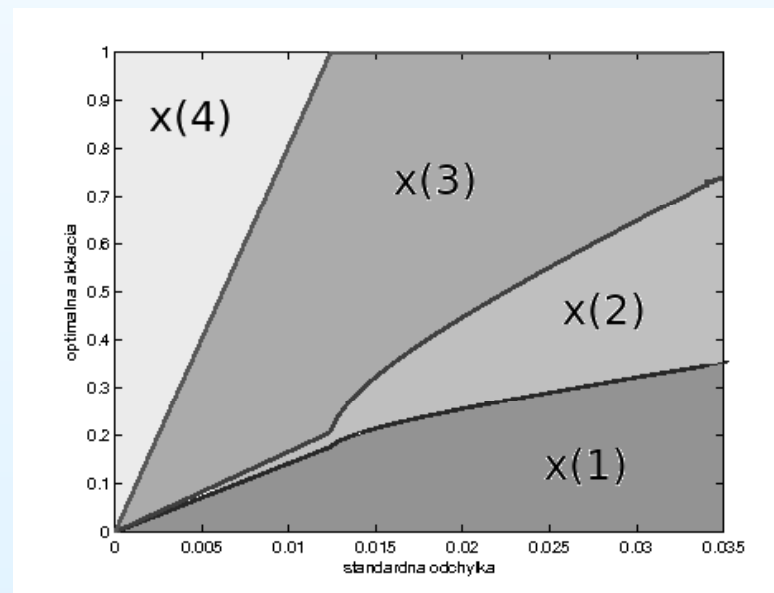
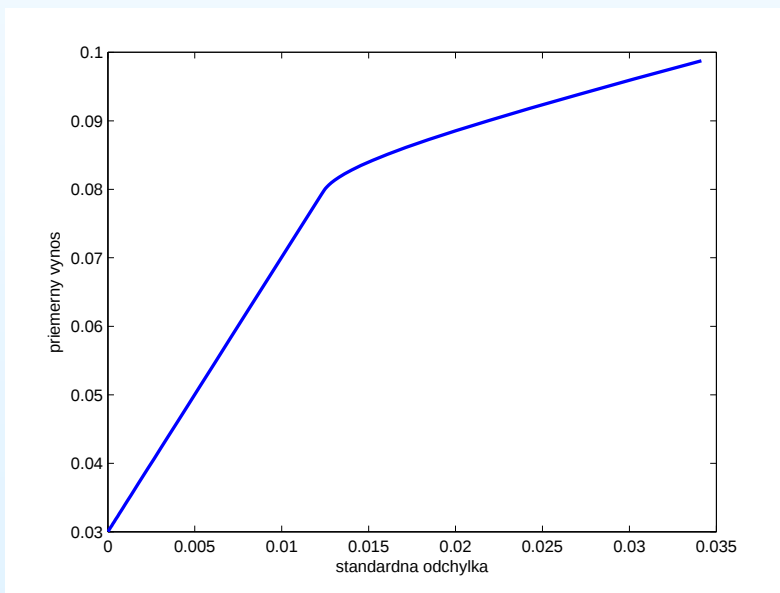
$$\left. \begin{array}{l} \text{Min} \quad -\bar{p}^T x + \mu x^T \Sigma x \\ \mathbf{1}^T x = 1 \\ x \geq 0 \end{array} \right\} \quad (MP)$$

Vyriešením úlohy (MP) pre hodnoty $\mu \in (0, \infty)$ dostaneme všetky Pareto optimálne hodnoty portfólia okrem limitných prípadov $\mu \rightarrow 0$ a $\mu \rightarrow \infty$.

Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie

Dáta:

$$p = [0.12; 0.1; 0.07; 0.03], \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0.0064 & 0.0008 & -0.0011 & 0.0048 \\ 0.0008 & 0.0025 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0011 & 0.0000 & 0.0004 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix}$$



Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie

```
gamma=logspace(1,7,100);
for i=1:100
    cvx_begin quiet
        variable x(4);
        minimize (-p'*x+gamma(i)*(x'*Sigma*x))
        subject to
            sum(x)==1; x>=0;
    cvx_end
    ER(i)=p'*x; SD(i)=sqrt(x'*Sigma*x);
    X(:,i)=x; v1(i)=X(1,i); v2(i)=v1(i)+X(2,i); v3(i)=v2(i)+X(3,i);
end;
figure plot(SD,ER,'LineWidth',2) % trade off
xlabel('standardna odchylka'); ylabel('priemerny vynos');
figure plot(SD,v1,SD,v2,SD,v3,'LineWidth',2) % optimalna alokacia
xlabel('standardna odchylka'); ylabel('optimalna alokacia');
```

REKONŠTRUKCIA SIGNÁLU

- signál je snímaný v pravidelných časových intervaloch a reprezentovaný nejakou funkciou závislou od času

$$x_i = x(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, T$$

- predpokladá sa, že signál sa príliš nemení - $x_i \approx x_{i+1}$
- audio signál - jednorozmerný signál
- obrázky/video - viacrozmerné signály
- prijatý signál je obyčajne znečistený šumom v :

$$x_{sum} = x + v$$

- **Úloha:** odhadnúť pôvodný signál x zo zašumeného signálu x_{sum} (signal de-noising)
- **Formulácia úlohy:**

$$\text{Min } \|x - x_{sum}\|_2 + \gamma\phi(x)$$

$\phi(x)$ je nejaká regularizačná funkcia

- Kvadratické vyhladenie**

$$\phi_{quad}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2 = \|Dx\|_2^2$$

- Totálna varácia**

$$\phi_{tv}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1} - x_i| = \|Dx\|_1$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n}$$

- Ak je pôvodný signál hladký a šum sa prudko mení - $\phi_{quad}(x)$
- Ak sa skokovito menia hodnoty pôvodného signálu - $\phi_{tv}(x)$

Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie

CVX kód:

% kvadraticke vyhladenie

cvx_begin

variable x(n)

minimize (norm(x-xcor,2)+gamma*(x'*D'*D*x))

cvx_end

% totalna variacia

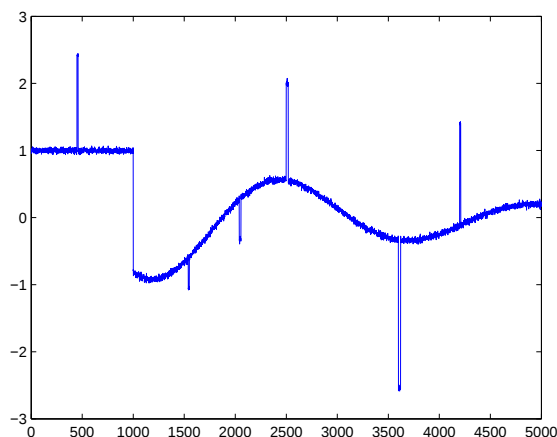
cvx_begin

variable y(n)

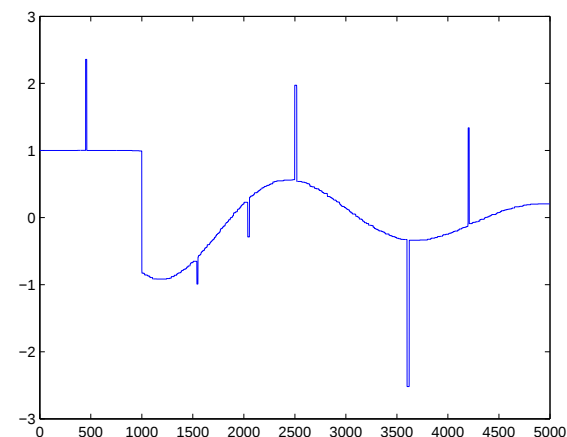
minimize (norm(y-xcor,2)+gamma*norm(D*y,1))

cvx_end

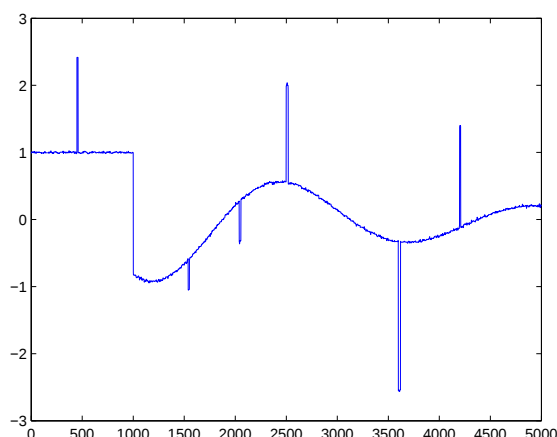
Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie



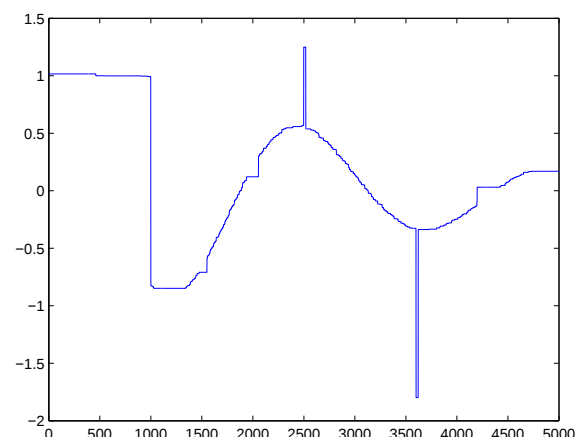
zašumený signál



TV rekonštruovaný signál $\gamma = 0.2$

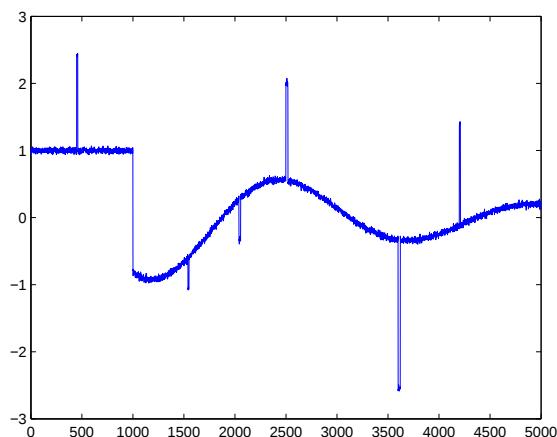


TV rekonštruovaný signál $\gamma = 0.02$

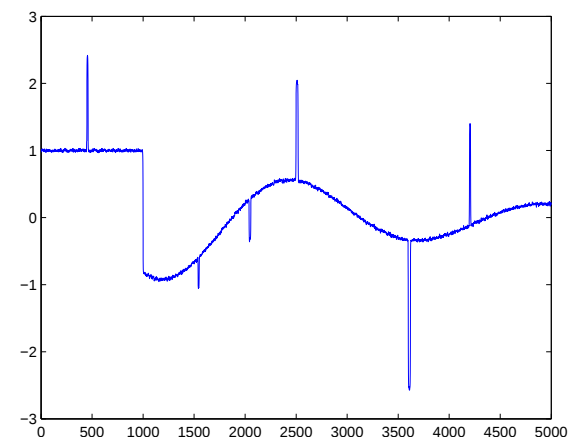


TV rekonštruovaný signál $\gamma = 0.9$

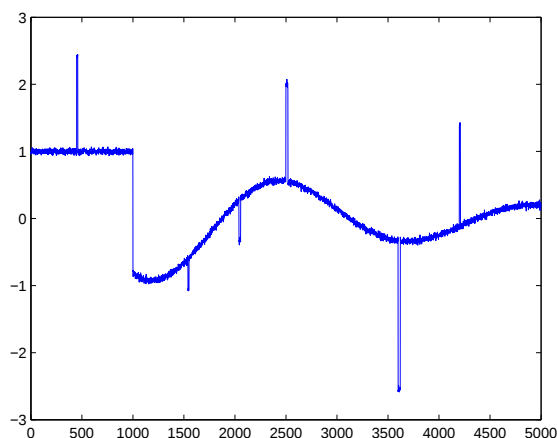
Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie



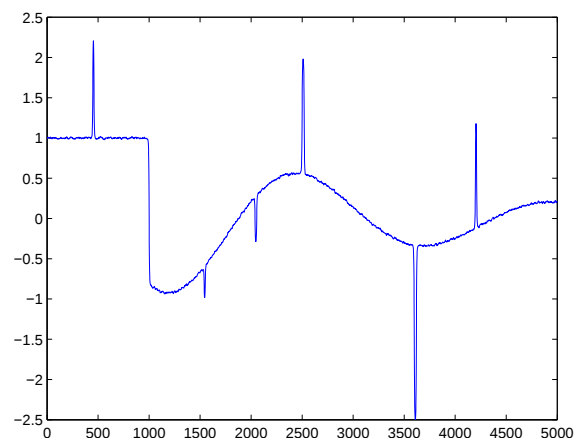
zašumený signál



KV rekonštruovaný signál $\gamma = 0.2$

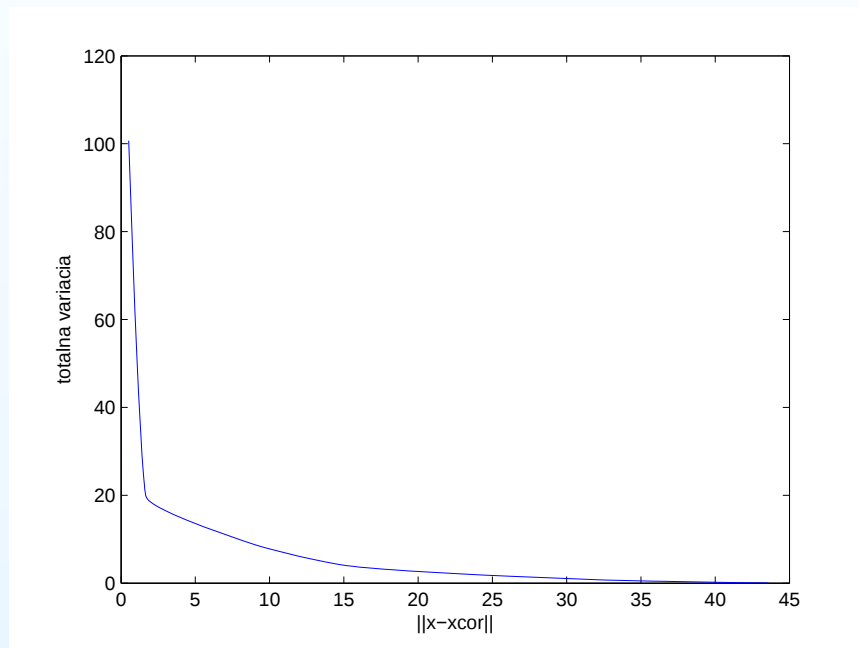


KV rekonštruovaný signál $\gamma = 0.02$

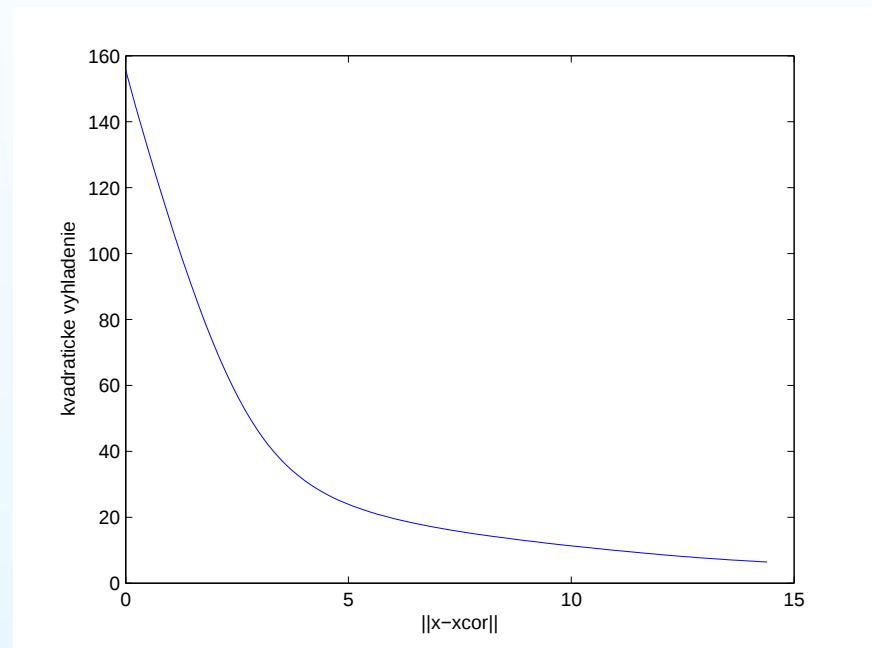


KV rekonštruovaný signál $\gamma = 0.9$

Optimálne trade-off krivky



trade-off pre funkciu totálnej variácie ϕ_{tv}



trade-off pre kvadratické vyhladenie ϕ_{quad}

V mnohých aplikáciách dáva zlom (tzv. knee) v trade-off krivke dobré kompromisné riešenie.

Rekonštrukcia obrázku

$$\text{Min} \quad \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|Wx\|_1$$

- b - rozmazaný $m \times n$ obrázok reprezentovaný ako mn rozmerný vektor
- A lineárna transformácia reprezentujúca "rozmazanie"
- W ortogonálna matica reprezentujúca vlnkovú transformáciu (wavelet)

Observed Image



Reconstructed Image (lambda=0.001)



GEOMETRICKÉ APLIKÁCIE

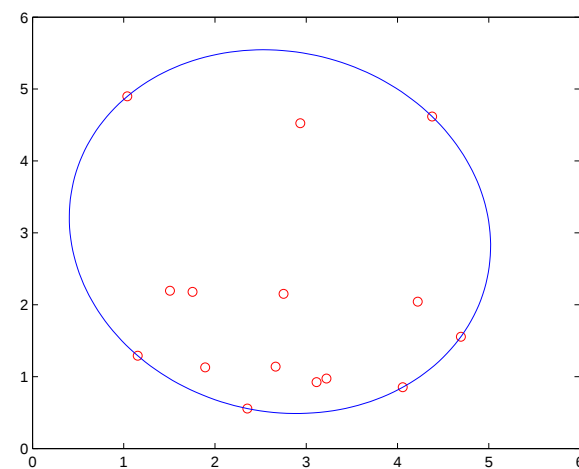
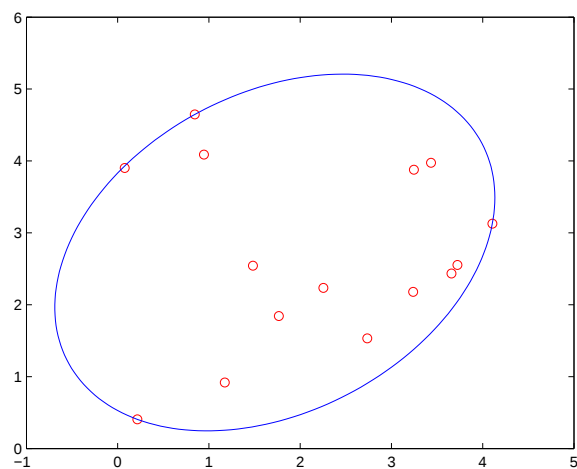
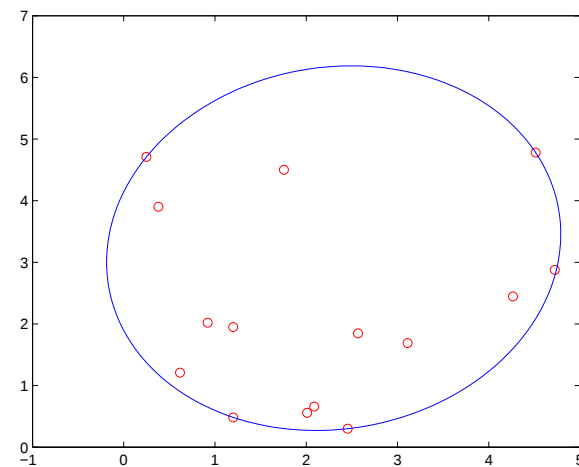
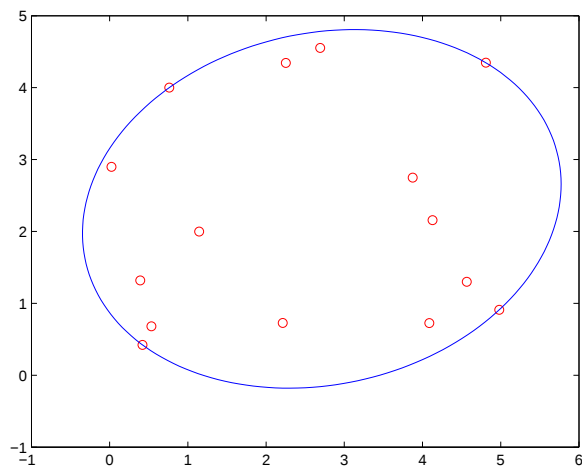
Minimálny elipsoid pokrývajúci konečnú množinu bodov

- Daná je množna bodov $\{v_1, \dots, v_n\}$
- Definujeme elipsoid ako $\mathcal{E} = \{v \mid \|Av + b\|_2 \leq 1\}$, kde $A \succ 0, c = -A^{-1}b$ je stred elipsoidu
- Objem elipsoidu je úmerný $\det A^{-1}$

Konvexná formuácia úlohy:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \ln \det A^{-1} \\ & \|Av_i + b\|_2^2 \leq 1, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie



Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie

CVX kód:

```
cvx_begin
    variable A(n,n) symmetric
    variable b(n)
    maximize( det_rootn( A ) )
    subject to
        norms( A * X + b * ones( 1, m ), 2 ) <= 1;
cvx_end
```

- Stĺpce X sú súradnice jednotlivých bodov $v_1, \dots, v_n$
- Namiesto $\ln \det A$ sa používa ekvivalentná a numericky výhodnejšia alternatíva $(\det A)^{\frac{1}{n}}$

Linéarne a nelineárne triedenie (Classification problems)

- Dané sú 2 množiny bodov z $\mathbb{R}^n$: $\{x_1, \dots, x_N\}$ a $\{y_1, \dots, y_n\}$
- Chceme nájsť funkciu $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ z danej triedy funkcií (lineárne, kvadratické, polynómy,..) takú, že

$$f(x_i) > 0, \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

$$f(y_i) < 0, \quad \forall i = 1, \dots, M.$$

- Ak platia vyššie uvedené nerovnosti, hovoríme, že funkcia f (resp. jej úroveňová množina $\{x \mid f(x) = 0\}$) separuje dané dve množiny bodov
- aplikácie v tzv. **machine learning** (oblasť umelej inteligencie)

Lineárne triedenie

- Hľadáme afínnu funkciu $f(x) = a^T x - b$ takú, že

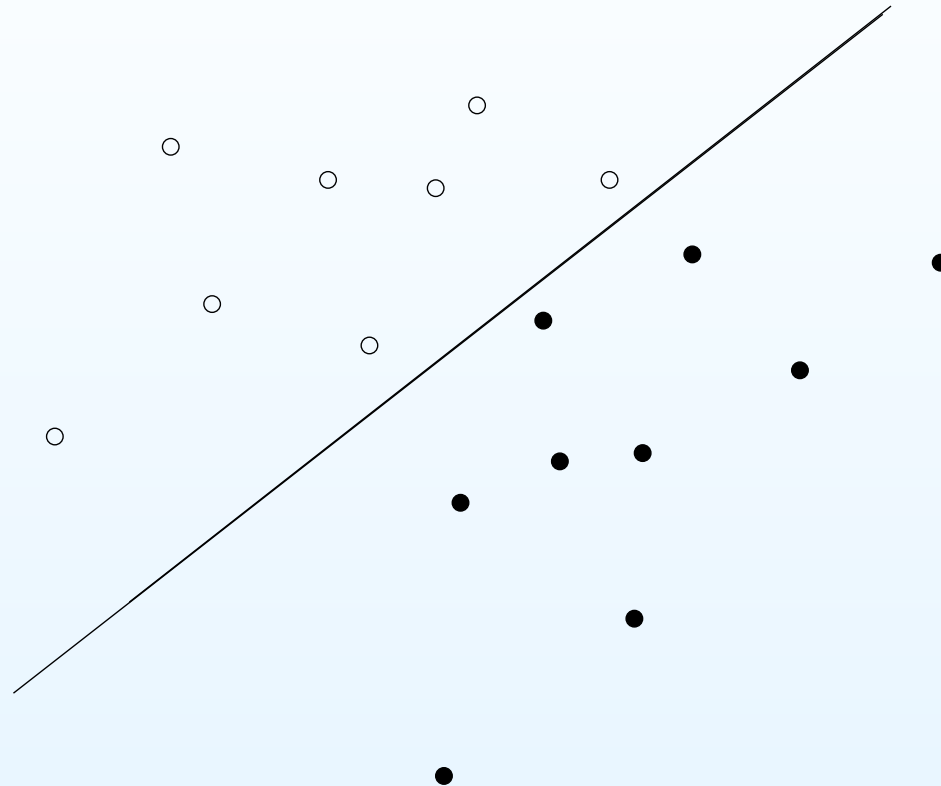
$$\left. \begin{array}{l} a^T x_i - b > 0, \quad \forall i = 1, \dots, N, \\ a^T y_i - b < 0, \quad \forall i = 1, \dots, M. \end{array} \right\} \quad (LT1)$$

- Nerovnosti sú homogénne v a, b - ekvivalentne môžeme písať

$$\left. \begin{array}{l} a^T x_i - b \geq 1, \quad \forall i = 1, \dots, N, \\ a^T y_i - b \leq -1, \quad \forall i = 1, \dots, M. \end{array} \right\} \quad (LT2)$$

- Teda ak existuje riešenie systému (LT1), resp. (LT2), tak existuje nadrovina $\{x \mid a^T x = b\}$, ktorá ostro separuje konvexné obaly daných množín bodov.

Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie



Množiny $\{x_1, \dots, x_N\}$ a $\{y_1, \dots, y_n\}$ sú odseparované afínnou funkciou, ktorej 0-úrovňová množina je priamka.

Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie

- Ak existuje nejaké riešenie (a, b) systému (LT1), resp. (LT2), tak ich existuje nekonečne veľa - máme celú triedu nadrovín separujúcich dané množiny bodov.
- **Robustný prístup:** hľadáme nadrovinu, ktorá má maximálnu vzdialenosť od daných množín bodov.

-

$$\left. \begin{array}{l} \text{Max}_{a,b,t} \quad t \\ a^T x_i - b \geq t, \quad i = 1, \dots, N \\ a^T y_i - b \leq t, \quad i = 1, \dots, M \\ \|a\|_2 \leq 1 \end{array} \right\} \quad (RLT)$$

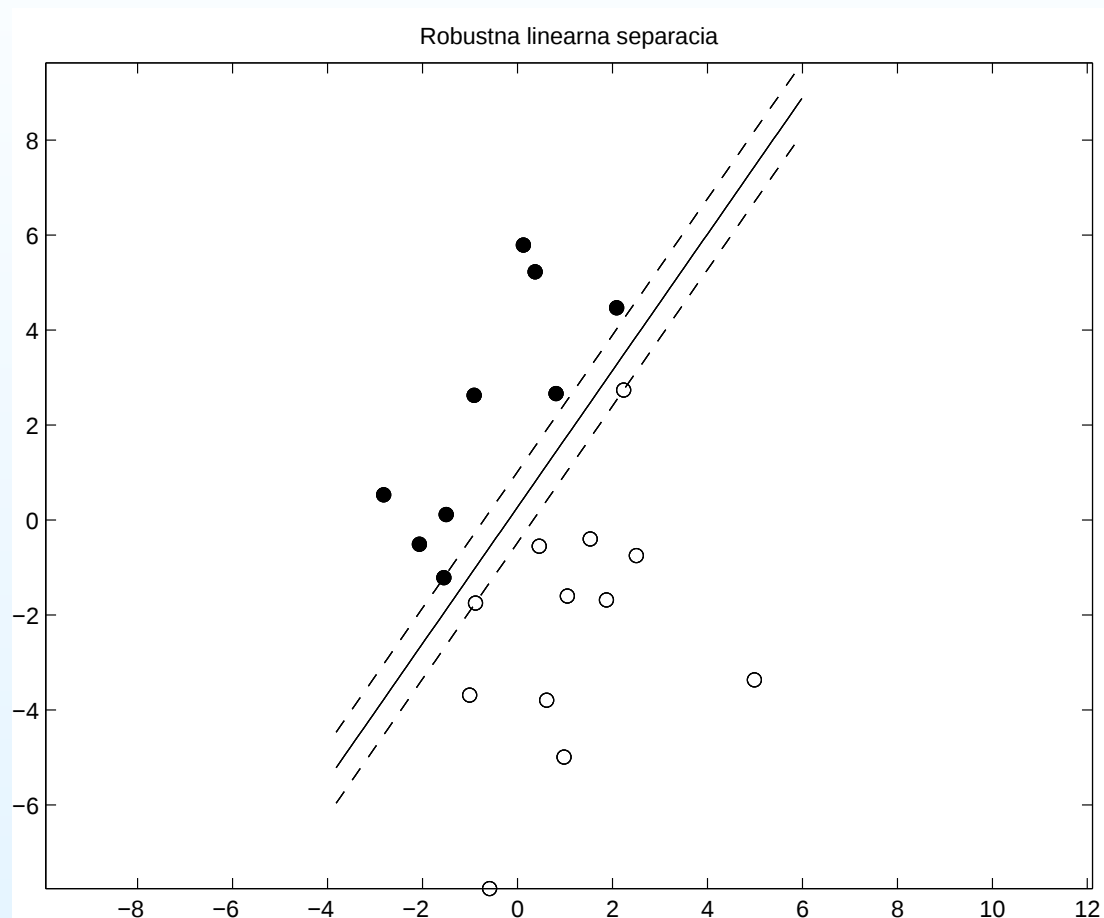
- Vektor a sa normalizuje podmienkou $\|a\|_2 \leq 1$ - inak by sme mali ľubovoľne veľkú vzdialenosť, v optime platí $\|a^*\| = 1$.
- Ak $t^* > 0$, tak existuje separujúca nadrovina.

Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie

CVX kód:

```
% vygenerovanie bodov
n = 2;
randn('state',3);
N = 12; M = 9;
Y = [1.5+1*randn(1,M); 2*randn(1,M)];
X = [-1.5+1*randn(1,N); 2*randn(1,N)];
T = [-1 1; 1 1];
Y = T*Y; X = T*X;
% -----
cvx_begin
    variables a(n) b(1) t(1)
    maximize (t)
    X'*a - b >= t;
    Y'*a - b <= -t;
    norm(a) <= 1;
cvx_end
```

Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie



Kvadratické triedenie

- Hľadáme kvadratickú funkciu $f(x) = x^T P x + q^T x + r$, kde $P \in \mathcal{S}^n, q \in \mathbb{R}^n, r \in \mathbb{R}$ takú, že

$$\left. \begin{array}{l} x_i^T P x_i + q^T x_i + r > 0, \quad \forall i = 1, \dots, N, \\ y_i^T P y_i + q^T y_i + r < 0, \quad \forall i = 1, \dots, M. \end{array} \right\} \quad (KT1)$$

- Nerovnosti sú homogénne v P, q, r - ekvivalentne môžeme písať

$$\left. \begin{array}{l} x_i^T P x_i + q^T x_i + r \geq 1, \quad \forall i = 1, \dots, N, \\ y_i^T P y_i + q^T y_i + r \leq -1, \quad \forall i = 1, \dots, M. \end{array} \right\} \quad (KT2)$$

- Dodaním podmienky na maticu P špecifikujeme typ oddel'ovacej funkcie, napr. ak $P \prec 0$ tak hľadáme elipsoid obsahujúci body $x_1, \dots, x_n$.

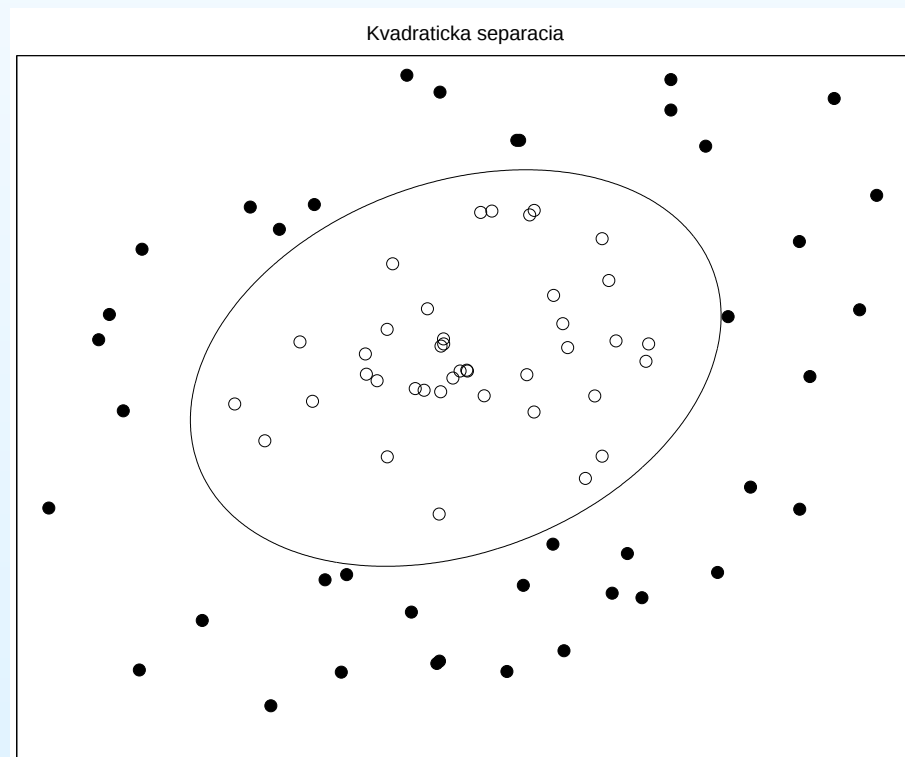
Stačí vyriešiť SDP úlohu prípustnosti:

Nájsť: P, q, r

$$x_i^T P x_i + q^T x_i + r \geq 1, \quad \forall i = 1, \dots, N,$$

$$y_i^T P y_i + q^T y_i + r \leq -1, \quad \forall i = 1, \dots, M,$$

$$P \preceq -I$$



Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie

CVX kód:

```
% vygenerovanie bodov
n = 2;
rand('state',0); randn('state',0);
N=40;
X = randn(2,N); X = X*diag(0.99*rand(1,N)./sqrt(sum(X.^2)));
Y = randn(2,N); Y = Y*diag((1.02+rand(1,N))./sqrt(sum(Y.^2)));
T = [1 -1; 2 1]; X = T*X; Y = T*Y;
% -----
cvx_begin sdp
    variable P(n,n) symmetric
    variables q(n) r(1)
    P <= -eye(n);
    sum((X'*P).*X',2) + X'*q + r >= +1;
    sum((Y'*P).*Y',2) + Y'*q + r <= -1;
cvx_end
```

(Opät') MARKOWITZOVO PORTFÓLIO - teraz via SOCP

1. Minimalizácia rizika

$$\begin{aligned} \text{Min}_x \quad & x^T \Sigma x \\ & \bar{p}^T x \geq r_{\min} \\ & \mathbf{1}^T x = 1, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

kde však kovariančná matica nie je presne známa ale uvažovaná z nejakej množiny neurčitosti v tvare elipsoidu.

2. Maximalizácia celkového očakávaného výnosu

$$\begin{aligned} \text{Min}_x \quad & \bar{p}^T x \\ & \mathbf{1}^T x = 1, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

s dodatočným pravdepodobnostným ohraničením typu $P(r \leq \alpha) \leq \beta$ kde α je "nechcený" výnos (strata) a β je maximálna pravdepodobnosť.

1. Robustná minimalizácia rizika

Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} \text{Min}_x \quad & \sup_{\Sigma \in \mathcal{E}} x^T \Sigma x \\ & \bar{p}^T x \geq r_{\min} \\ & \mathbf{1}^T x = 1, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

kde elipsoid

$$\mathcal{E} = \left\{ \Sigma_0 + \sum_{i=1}^m \Sigma_i u_i \mid \|u\|_2 \leq 1 \right\}$$

a $\Sigma_i \succ 0$, $i = 0, 1, \dots, m$.

Platí:

$$\sup_{\Sigma \in \mathcal{E}} x^T \Sigma x = x^T \Sigma_0 x + \sup_{\|u\| \leq 1} \sum_{i=1}^m (x^T \Sigma_i x) u_i = x^T \Sigma_0 x + \left(\sum_{i=1}^m (x^T \Sigma_i x)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie

Úlohu teda možno prepísať ako

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & x^T \Sigma_0 x + \left(\sum_{i=1}^m (x^T \Sigma_i x)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \bar{p}^T x \geq r_{\min} \\ & \mathbf{1}^T x = 1, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Pre $j = 0, 1, \dots, m$ platí:

$$x^T \Sigma_j x \leq y_j \Leftrightarrow \left\| \begin{array}{c} \Sigma_j^{\frac{1}{2}} x \\ y_j - \frac{1}{4} \end{array} \right\|_2 \leq y_j + \frac{1}{4}$$

a teda máme SOCP formuláciu:

$$\begin{aligned} \text{Min}_{x, y_0, y, t} \quad & y_0 + t \\ & \left\| \begin{array}{c} \Sigma_j^{\frac{1}{2}} x \\ y_j - \frac{1}{4} \end{array} \right\|_2 \leq y_j + \frac{1}{4}, \quad j = 0, 1, \dots, m \\ & \|y\|_2 \leq t, \quad \bar{p}^T x \geq r_{\min} \\ & \mathbf{1}^T x = 1, \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie

CVX kód:

```
cvx_begin
    variables x(4) y(5) t(1)
    minimize (y(1)+ t)
    subject to
        for j=1:5
            norm([ Sigma(:, :, j)*x; y(j) - 1/4], 2) <= y(j) + 1/4;
        end;
        norm(y(2:5), 2) <= t;
        sum(x) == 1;
        x >= 0;
        p' * x >= rmin;
cvx_end
```

2. Maximalizácia očakávaného výnosu s pravdepodobnostnými ohraničeniami

Uvažujme úlohu

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \bar{p}^T x \\ & P(r \leq \alpha) \leq \beta \\ & \mathbf{1}^T x = 1, \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- $p \sim \mathcal{N}(\bar{p}, \Sigma)$, $r = p^T x \sim \mathcal{N}(\bar{r}, \sigma^2)$, kde $\bar{r} = \bar{p}^T x$, $\sigma^2 = x^T \Sigma x$.
- Ohraničenie $P(r \leq \alpha) \leq \beta$ je ekvivalentné

$$P\left(\frac{r - \bar{r}}{\sigma} \leq \frac{\alpha - \bar{r}}{\sigma}\right) \leq \beta$$

Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie

- $\frac{r-\bar{r}}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ a teda

$$P\left(\frac{r-\bar{r}}{\sigma} \leq \frac{\alpha-\bar{r}}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\alpha-\bar{r}}{\sigma}\right),$$

kde $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ je kumulatívna distribučná funkcia štandardného normálneho rozdelenia

- Ohraničenie možno teda ekvivalentne zapísať ako

$$\frac{\alpha-\bar{r}}{\sigma} \leq \Phi^{-1}(\beta),$$

resp.

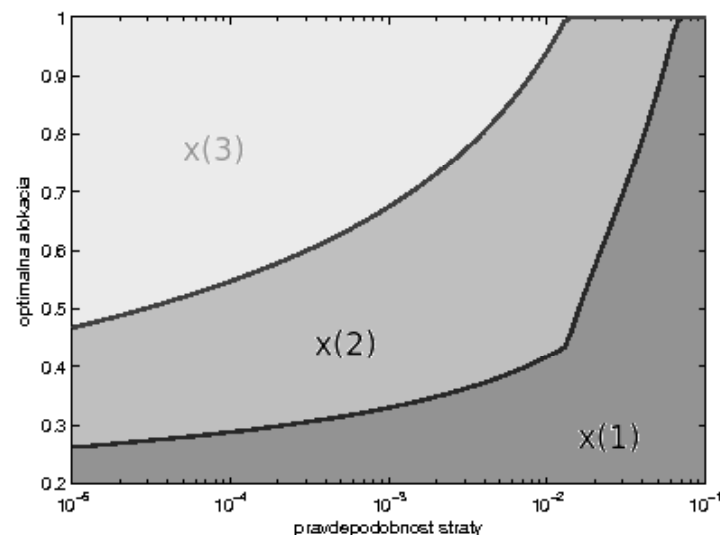
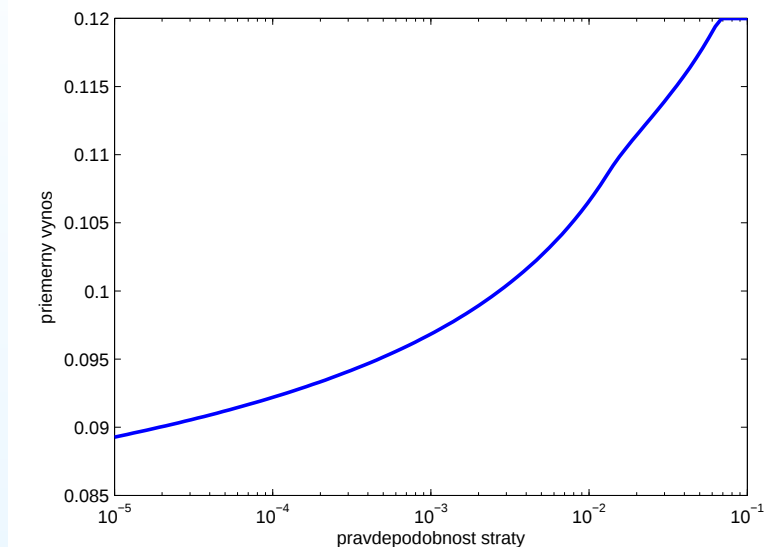
$$\alpha - \bar{p}^T x \leq (x^T \Sigma x)^{\frac{1}{2}} \Phi^{-1}(\beta),$$

resp.

$$\bar{p}^T x + \Phi^{-1}(\beta) \|\Sigma^{\frac{1}{2}} x\|_2 \geq \alpha,$$

čo je pre $\beta \leq \frac{1}{2}$ ohraničenie pre kužel' 2. rádu.

Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie



Pre $\alpha = 0$, hodnoty pravdepodobnosti $10^{-4} \leq \beta \leq 10^{-1}$ a dáta $\bar{p}$ a Σ z príkladu bikriteriálnej optimalizácie - vl'avo: maximálny priemerný výnos v závislosti od pravdepodobnosti straty, vpravo: optimálna alokácia portfólia.

Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie

CVX kód:

```
p=[0.12 ; 0.1 ; 0.07; 0.03];
Sigma=[0.0064 0.0008 -0.0011 0; 0.0008 0.0025 0 0;
        -0.0011 0 0.0004 0; 0 0 0 0];
Sigma=sqrtm(Sigma);

beta=0.01;
val=sqrt(2)*erfcinv(2*beta);
% funkcia erfcinv umoznuje vyjadrit hodnotu inv. kumul. dist. funkcie
    cvx_begin quiet
        variable x(4);
        maximize (p'*x)
        subject to
            val*norm(Sigma*x,2)<=p'*x; % konicke ohranicenie
            sum(x)==1;
            x>=0;
    cvx_end
```

OPTIMÁLNY NÁVRH EXPERIMENTOV

Chceme odhadnúť vektor $x \in \mathbb{R}^n$ z meraní (experimentov)

$$y_i = a_i^T x + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, m$$

kde ϵ_i sú chyby merania.

Predpokladá sa:

- $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $i = 1, \dots, m$
- $a_1, \dots, a_m$ generujú $\mathbb{R}^n$ (a teda $\sum_{i=1}^m a_i a_i^T \succ 0$)

Odhad maximálnej vierohodnosti je daný ako

$$\hat{x} = \left(\sum_{i=1}^m a_i a_i^T \right)^{-1} \sum_{i=1}^m y_i a_i,$$

pričom príslušná chyba odhadu $e = \hat{x} - x$ spĺňa

$$\mathbb{E}(e) = 0, \quad \mathbf{E} = \mathbb{E}(e e^T) = \left(\sum_{i=1}^m a_i a_i^T \right)^{-1}$$

Prednáška siedma: Aplikácie konvexnej optimalizácie

- Matica $\mathbf{E}$ charakterizuje presnosť (informatívnosť) odhadu.
- Predpokladajme, že vektory $a_1, \dots, a_m$ vyberáme z N možných "testovacích" vektorov $v_1, v_2, \dots, v_N$.
- Cieľom **navrhovania experimentov** je vybrať vektory a_i z pevne zvoleného "menu" N možných experimentov $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ tak, aby boli maximálne informatívne.
- Nech m_j je počet experimentov pre ktoré a_i má hodnotu v_j - t.j. $m_1 + \dots + m_N = m$. Kovariančnú maticu potom možno vyjadriť ako

$$\mathbf{E} = \left(\sum_{j=1}^N m_j v_j v_j^T \right)^{-1}.$$

- **Základná úloha navrhovania experimentov:** ak je dané menu možných experimentov $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ a celkový počet experimentov m , treba nájsť počet opakovaní jednotlivých typov experimentov $m_1, \dots, m_N$ tak, aby bola kovariančná matica chýb $\mathbf{E}$ minimálna (v nejakom zmysle).

Základná formulácia úlohy:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min} \quad \mathbf{E} = \left(\sum_{j=1}^N m_j v_j v_j^T \right)^{-1} \\ m_i \geq 0, \sum_{i=1}^N m_i = m, m_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, N \end{array} \right\} \quad (ED)$$

- Ak $m \approx n$, tak úloha (ED) je vo všeobecnosti ťažký kombinatorický problém.
- Ak $m \gg n$, tak relaxáciou ohraničení môžeme získať dobré aproximatívne riešenie úlohy (ED)
- Označme $w_i = m_i/m$, $i = 1, \dots, N$. Potom

$$\mathbf{E} = \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^N w_j v_j v_j^T \right)^{-1}$$

Zrejme $w \geq 0$, $\mathbf{1}^T w = 1$ a w_i je celočíselný násobok $1/m$.

- **Relaxovaná úloha:**

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{m} \left(\sum_{j=1}^N w_j v_j v_j^T \right)^{-1} \\ w \geq 0, \mathbf{1}^T w = 1 \end{array} \right\} \quad (RED)$$

- Z riešenia relaxovanej úlohy možno zaokrúhlením získať hodnoty $m_i = [mw_i]$.

- **Skalarizácia:** kritérium optimality matice $\mathbf{E}$ - funkcia

$$\Phi : \mathcal{S}_{++}^n \rightarrow \mathbb{R}:$$

- D-optimalita: $\Phi(\mathbf{X}) = \ln \det \mathbf{X}^{-1}$
 - E-optimalita: $\Phi(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X}^{-1}\|_2 = \lambda_{\max}(\mathbf{E})$
 - A-optimalita: $\Phi(\mathbf{X}) = \text{tr}(\mathbf{X})^{-1}$
- Skalárna formulácia úlohy:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min} \quad \Phi \left(\sum_{j=1}^N w_j v_j v_j^T \right) \\ w \geq 0, \mathbf{1}^T w = 1 \end{array} \right\} \quad (SED)$$

D-optimálny návrh experimentov:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min} \quad \ln \det \left(\sum_{j=1}^N w_j v_j v_j^T \right)^{-1} \\ w \geq 0, \mathbf{1}^T w = 1 \end{array} \right\} (DED)$$

CVX kód:

```
% V je n x N matica V=[v_1 | ... | v_N]
cvx_begin
    variable w(N)
    maximize ( det_rootn( V*diag(w)*V' ) )
    subject to
        sum(w) == 1;
        lambda >= 0;
cvx_end
```

E-optimálny návrh experimentov:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Max} \quad t \\ \sum_{j=1}^N w_j v_j v_j^T \succeq tI \\ w \geq 0, \mathbf{1}^T w = 1 \end{array} \right\} \quad (EED)$$

CVX kód:

```
% V je n x N matica V=[v_1 | ... | v_N]
cvx_begin sdp
    variables t w(N)
    maximize ( t )
    subject to
        V*diag(w)*V' >= t*eye(n,n);
        sum(w) == 1;
        w >= 0;
cvx_end
```

A-optimálny návrh experimentov:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Min} \quad \mathbf{1}^T t \\ \left(\begin{array}{cc} \sum_{j=1}^N w_j v_j v_j^T & e_i \\ e_i & \text{diag}(t) \end{array} \right) \succeq 0, \quad i = 1, \dots, n \\ w \geq 0, \mathbf{1}^T w = 1 \end{array} \right\} \quad (EED)$$

CVX kód:

```
% V je n x N matica V=[v_1 | ... | v_N]
```

```
e = eye(n,n);
```

```
cvx_begin sdp
```

```
variables w(N) t(n)
```

```
minimize ( sum(t) )
```

```
subject to
```

```
for k = 1:n
```

```
    [ V*diag(w)*V'   e(:,k);
```

```
        e(k,:)       t(k)    ] >= 0;
```

```
end
```

```
sum(w) == 1;
```

```
w >= 0;
```

```
cvx_end
```