

# Konvexná optimalizácia - letný semester 2018

M. Trnovská, KAMŠ, FMFI UK

## Motivácia

- Úloha konvexného programovania v širšom zmysle - triedy kónických úloh
- **Aplikácie konvexnej optimalizácie:** inžinierske, financie, ekonómia (optimalizácia portfólia, preferencie,...) optimálny dizajn (topologický, experimentálny,...), aproximácia a fitovanie dát, štatistika, siete, spracovanie signálu (obraz, zvuk), optimálne riadenie, geometrické úlohy (lineárna a nelineárna separácia bodov, ..), medicína, ...- dokonca **modelovanie vesmíru**
- Existujú algoritmy, ktoré vedia **spoľahlivo a efektívne** riešiť aj veľké úlohy (založené na metódach vnútorného bodu).

- Existujú **solvre a modelovacie nástroje**, v ktorých sú tieto algoritmy implementované - stačí len správne definovať úlohu (napr. CVX).
- Je dôležité vedieť rozpoznať konvexnú alebo kónickú štruktúru úlohy, odvodiť duálnu úlohu a využiť duálne vlastnosti, nájsť vhodnú konvexnú (kónickú) aproximáciu nekonvexných, ťažko riešiteľných úloh.

Aplikácia: TTD

## Využitie konvexnej optimalizácie

- Topologický dizajn - Problém Eiffelovej veže

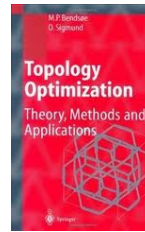


- TRUSS - mechanická konštrukcia zložená z priečok a uzlov, na ktoré pôsobí záťaž
- Optimalizuje sa "pevnosť konštrukcie"

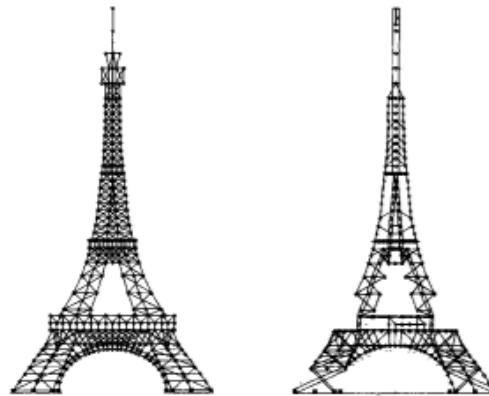
## Aplikácia: TTD

- – **Vstup:** pozície uzlov, záťaž na uzly, celková hmotnosť (objem) konštrukcie
- **Premenné úlohy:** váhy pridelené jednotlivým priečkam
- **Úloha:** nájsť optimálne rozloženie váh tak, aby bola konštrukcia čo najpevnejšia - aby bola potenciálna energia reprezentujúca poddajnosť konštrukcie minimálna
- M. P. Bendsøe, O. Sigmund: Topology Optimization - Theory, Methods and Applications

## Aplikácia: TTD



### 4.3 Computational procedures and examples 245



**Fig. 4.6.** The flexibility in choice of ground structure. Optimal design of a well-known structure. Left hand picture shows the ground structure and the right hand picture the optimal topology for a single downward load at the top of the structure. The example shows that it is crucial to consider multiple load cases for realistic structures. By courtesy of M. Kocvara and J. Zowe.

Aplikácia: kozmológia

- Rekonštrukcia "raného" vesmíru



- Y. Breiner, U. Frisch, M. Hénon, G. Loeper, S. Matatrrese, R. Mohayaee, A. Sobolevski: **Reconstruction of the early Universe as a convex optimization problem**, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 2003.

# Aplikácia: kozmológia

Mon. Not. R. Astron. Soc. **346**, 501–524 (2003)

## Reconstruction of the early Universe as a convex optimization problem

Y. Brenier,<sup>1</sup> U. Frisch,<sup>2,3\*</sup> M. Hénon,<sup>2</sup> G. Loeper,<sup>1</sup> S. Matarrese,<sup>4</sup> R. Mohayaee<sup>2</sup>  
and A. Sobolevskii<sup>2,5</sup>

<sup>1</sup>*CNRS, UMR 6621, Université de Nice-Sophia-Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 02, France*

<sup>2</sup>*CNRS, UMR 6529, Observatoire de la Côte d'Azur, BP 4229, 06304 Nice Cedex 4, France*

<sup>3</sup>*Institute for Advanced Study, Einstein Drive, Princeton, NJ 08540, USA*

<sup>4</sup>*Dipartimento di Fisica 'G. Galilei' and INFN, Sezione di Padova, via Marzolo 8, 35131-Padova, Italy*

<sup>5</sup>*Department of Physics, M. V. Lomonosov Moscow University, Leninskie Gory, 119992 Moscow, Russia*

Accepted 2003 August 10. Received 2003 August 1; in original form 2003 April 10

### ABSTRACT

We show that the deterministic past history of the Universe can be uniquely reconstructed from knowledge of the present mass density field, the latter being inferred from the three-dimensional distribution of luminous matter, assumed to be tracing the distribution of dark matter up to a known bias. Reconstruction ceases to be unique below those scales – a few Mpc – where multistreaming becomes significant. Above  $6 h^{-1}$  Mpc we propose and implement an effective Monge–Ampère–Kantorovich method of unique reconstruction. At such scales the Zel'dovich approximation is well satisfied and reconstruction becomes an instance of optimal mass transportation, a problem which goes back to Monge. After discretization into  $N$  point masses one obtains an assignment problem that can be handled by effective algorithms with not more than  $O(N^3)$  time complexity and reasonable CPU time requirements. Testing against  $N$ -body cosmological simulations gives over 60 per cent of exactly reconstructed points.

We apply several interrelated tools from optimization theory that were not used in cosmological reconstruction before, such as the Monge–Ampère equation, its relation to the mass transportation problem, the Kantorovich duality and the auction algorithm for optimal assignment. A self-contained discussion of relevant notions and techniques is provided.



## Sylabus predmetu konvexná optimalizácia

- **Úlohy konvexného programovania v štandardnom tvare (opakovanie)**
- **Zovšeobecnenie konvexných úloh**
  - Úloha konvexného programovania v užšom a širšom zmysle
  - Kónické lineárne programovanie (KLP)
  - Pojem konvexného kužeľa
  - Základné triedy - LP, SDP, SOCP, ...

– Maskovanie štandardných konvexných úloh do tvaru KLP

- **Užitočné témy z teórie matíc**

- Schurov doplnok

- Moore-Penroseho inverzia

- **Úlohy kónického lineárneho programovania**

- Vzťahy medzi základnými triedami

- Kónicky reprezentovateľné funkcie

- **Geometria konvexných kužeľov**

- Pojem vlastného kužeľa, indukované usporiadania
- Pojem duálneho kužeľa, samoduálne kužele
  
- **Dualita v kónickom lineárnom programovaní**
  - Odvodenie duálnej úlohy
  - Zovšeobecnená Farkasova lema
  - Slabá a silná dualita
  
- **Vybrané aplikácie KLP**
  - Optimalizácia portfólia

- Optimálny návrh experimentov
- Úloha minimálnej plochy
- Lineárna a kvadratická diskriminácia

- **Kónické relaxácie**

- Kónické relaxácie nokonvexných kvadratických úloh
- Úloha maximálneho rezu
- Exaktné relaxácie

## Pravidlá hodnotenia predmetu

- Celkové hodnotenie predmetu závisí od hodnotenia **projektu** (40 bodov), a od **domácich úloh**, ktoré budú zadávané v priebehu semestra (60+ bodov)
- Projekt aj domáce úlohy sa vypracovávajú **v skupinách** (1-3 študenti). Projekt pozostáva zo spracovania aplikácie, odovzdáva sa textová časť vypracovaná v Latexu (4-8 strán) a prezentácie projektu na konci semestra pred ostatnými študentami.
- Očakáva sa aktívna účasť na prednáškach. Jedna neospravedlnená neúčasť je bez následkov, za každú ďalšiu je -5 bodov. Platí od 2. týždňa semestra.

## Známka za predmet konvexná optimalizácia

body	známka
100-91	A
90-81	B
80-71	C
70-61	D
60-51	E

**Stránka predmetu:**

[http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/trnovska/  
konvexoptim.html](http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/trnovska/konvexoptim.html)