

Cvičenia z lineárnej algebr I - Príklady na precvičenie

1. Dané sú matice A, B . Označme $C = AB$ a $D = BA$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ 7 & 9 & 6 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 8 & 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 7 & 9 & 6 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Aký bude mať matica C rozmer? Nájdite prvky c_{33}, c_{52}, c_{16} .
- Aký bude mať matica D rozmer? Nájdite prvky d_{77}, d_{45}, d_{12} .
- Spočítajte skalárny súčin 3. a 6. stĺpca matice A (stĺpce chápeme ako vektory). Sú tieto stĺpce navzájom kolmé?
- Spočítajte skalárny súčin 2. a 7. riadku matice B (riadky chápeme ako vektory). Sú tieto riadky navzájom kolmé?
- Spočítajte dĺžku 5. riadka matice A (ako vektora).
- Spočítajte dĺžku 4. stĺpca matice B (ako vektora).

2. Vyriešte systémy Gaussovou elimináciou:

$$\begin{array}{rclclcl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 9 & x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 & x_1 - 3x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & = & 0 & -x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 5 & -x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 & = & 4 & 3x_1 + x_2 + 7x_3 & = & 2 & 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 & = & 0 \end{array}$$

3. Dané sú matice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 5 & -6 \\ 7 & -8 & 9 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- Spočítajte súčiny AP, PA, PT, TP, TE .
- Nájdite inverzné matice k P a E (ak existujú).
- Nájdite matice $AA^T, A^T A, EE^T, E^T E, TT^T, T^T T$.
- Nájdite matice $3A - E + 2T, P^2 + A - T, (2T - E)^2$.
- Nájdite matice $E + E^T, T + T^T, P^{421}$.

4. Nájdite systém troch rovníc s tromi neznámymi, kde jednotlivé rovnice predstavujú:

- 3 roviny, ktorých prienikom je priamka;
- 3 roviny, ktoré nemajú spoločný prienik, ale žiadne dve nie sú rovnobežné;
- 3 roviny, ktoré sú navzájom rovnobežné;
- 3 roviny, ktorých prienikom je práve jeden bod.

5. V závislosti od parametra k zistite, či je systém regulárny alebo singularný, v prípade singularity kedy má 0 alebo nekonečne veľa riešení:

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & k \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 & = & k^2 \end{array}$$

6. Dokážte, že ak $ad - bc \neq 0$, tak systém

$$\begin{array}{rcl} ax + by & = & r \\ cx + dy & = & s \end{array}$$

je regulárny.

7. Nájdite systém troch rovníc s tromi neznámymi, ktorého riešenie je

- priamka $\{(1-t, 2-t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$
- rovina $\{(t+s, t-s, 1-t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.