Nájdite 4 základné podpriestory k daným maticiam:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Riešenie:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hodnosť $h(A) = 2 = dim\mathcal{S}(A) = dim\mathcal{S}(A^T)$. Zrejme

$$\mathcal{S}(A) = span \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \qquad \mathcal{S}(A^T) = span \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Nulový priestor je

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0\}.$$

V systéme rovníc, ktoré definujú $\mathcal{N}(A)$ sú 2 voľné premenné (napr. x_3, x_4) a 2 viazané (x_1, x_2). Položme $x_3 = t, x_4 = s$. Potom

$$x_2 = -x_3 = -t, \quad x_1 = -2x_2 - x_4 = 2t - s.$$

Teda

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}(A) = span \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Ďalej

$$\mathcal{N}(A^T) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y_1 + y_3 = 0, y_2 = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R} \right\} = span \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

(zamyslite sa prečo).

Rozmer matice A je $m \times n = 3 \times 4$. Všimnite si, že

$$dim\mathcal{S}(A) = h(A) = dim\mathcal{S}(A^T) = h(A^T) = 2;$$

$$dim\mathcal{N}(A) + dim\mathcal{S}(A^T) = 2 + 2 = 4 = n; \quad dim\mathcal{N}(A^T) + dim\mathcal{S}(A) = 1 + 2 = 3 = m;$$

vektory z $\mathcal{N}(A)$ sú kolmé na vektory z $\mathcal{S}(A^T)$, vektory z $\mathcal{N}(A^T)$ sú kolmé na vektory z $\mathcal{S}(A)$.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

Vyriešte samostatne.