1. Potreba diferenciálneho počtu na množinách bez lineárnej štruktúry

1.1. Príklad. Ideálne kyvadlo. Ide o pohyb hmotného bodu na nehmotnej niti v zvislej rovine pod vplyvom tiaže.

Nech m je hmotnosť kyvadla, l je dĺžka nite, g gravitačná konštanta.

Ak označíme φ odklon kyvadla od dolnej zvislej polohy, z prvého Newtonovho zákona dostaneme pre φ diferenciálnu rovnicu 2. rádu

$$\ddot{\varphi} = -a \sin \varphi, \tag{1.1}$$

kde $a = g/l$.

Ekvivalentne môžeme rovnicu (1.1) zapísať ako systém dvoch diferenciálnych rovníc 1. rádu:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -a \sin \varphi. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Zrejme φ nadobúda hodnoty na jednotkovej kružnici $\mathbb{S}$, kým ω nadobúda hodnoty v $\mathbb{R}$; stavovým priestorom rovnice (1.2) je teda $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$.

Keďže ide o konzervatívny systém (t.j. celková mechanická energia E je integrálom pohybu), trajektórie riešení (1.2) sú časťami hladín energie

$$E = T + U = \text{ konšt} \tag{1.3}$$

kde $T = \frac{1}{2}\omega^2$, $U = \int a \sin \varphi d\varphi = -a \cos \varphi$.

Analýzou kriviek (1.3) sa ľahko presvedčíme, že trajektórie vyzerajú ako na obrázku 1.1.:

Všimnime si, že obrázok je periodický vo φ s periódou 2π - čo aj musí byť, lebo os φ vlastne reprezentuje kružnicu, ktorá je faktorovým priestorom $\mathbb{R}$ pri stotožnení $x \equiv x + 2\pi$. "Vonkajšie" pohyby (t.j. pohyby, ktorých trajektórie sú na obr. 1.1 reprezentované neuzavretými vlnovkami) sú fakticky periodické, hoci tak nevyzerajú.

Akosi sme dostali "diferenciálne rovnice" na $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ hoci to nie je lineárny priestor. Bolo to možné preto, že "lokálne kružnica vyzerá ako $\mathbb{R}$".

Na pohyb kyvadla sa môžeme pozerať aj inak - že ide o pohyb bodov v rovine, na ktorý okrem sily tiaže pôsobí aj sila v osi nite, ktorá bráni tomu, aby hmotný bod kružnicu opustil. Ak x je polohový vektor hmotného bodu s vodorovnou zložkou x_1 a zvislou x_2, potom pohybové rovnice sú

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \mathbf{g} - \lambda x \\ |x|^2 &= l^2 \end{aligned}$$

kde $\mathbf{g}$ je vektor $(0, -g)$. Rozpisom do zložiek dostaneme

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\lambda x_1 \\ \ddot{x}_2 &= -g - \lambda x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 &= l^2. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dvojnásobným derivovaním poslednej rovnice podľa času postupne dostaneme

$$\begin{aligned} x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 &= 0 \\ x_1\ddot{x}_1 + x_2\ddot{x}_2 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 &= 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Sčítaním prvých dvoch rovníc (1.4), vynásobených x_1 resp. x_2 dostaneme

$$x_1\ddot{x}_1 + x_2\ddot{x}_2 = -\lambda x_1^2 - g x_2 - \lambda x_2^2;$$

dosadením do ľavej strany z (1.4) dostaneme

$$(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_1^2) = \lambda x_1^2 + g x_2 + \lambda x_2^2,$$

z čoho

$$\lambda = \frac{-g x_2 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{l^2}.$$

Všimnime si, že druhý variant opisu kyvadla nepredpokladá vopred, že pohyb sa deje po kružnici, vyjde to z rovnice.

Ďalej si všimnime, že kým v prvom opise je kružnica objekt per se, v druhom je vopred chápaná ako podmnožina roviny.

1.2. Dvojité kyvadlo.

Podobne ako v Príklade 1.1, z Newtonovho zákona odvodíme rovnice

$$\begin{aligned} m_1 l_1 \ddot{\varphi}_1 &= -m_1 g \sin\varphi_1 + m_2 g \cos\varphi_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ m_2 l_2 \ddot{\varphi}_2 &= -m_2 g \sin\varphi_2 \end{aligned}$$

kde m_1, m_2 sú hmotnosti vnútorného resp. vonkajšieho hmotného bodu.

Vidíme, že diferenciálna rovnica je na $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$.

1.3. Kinetika pohybu tuhého telesa. V predchádzajúcich dvoch prípadoch nadobúdal stav objektu, ktorého pohyb sme opisovali, hodnoty v množinách, ktoré mohli byť prirodzene vnorené do euklidovského priestoru. Napríklad, jednoduché kyvadlo sa pohybovalo po kružnici, ktorú sme si mohli prestaviť ako kružnicu v zvislej podrovine obklopujúceho nás trojrozmerného euklidovského priestoru.

Nie vždy je to tak. Uvažujme tuhé teleso, upevnené v jednom bode. Každá jeho možná poloha vznikne transformáciou trojrozmerného euklidovského priestoru, ktorá nemení vzdialenosti, uhly ani orientáciu a ponecháva jeden bod v pokoji - teda izometriou. Z geometrie je známe, že transformácia v $\mathbb{E}^3$ s pevným bodom je izometriou práve vtedy, ak je násobením unitárnou maticou (t. j. maticou A takou, že $A^{-1} = A^T$) s kladným determinantom. Množinu takýchto matíc označujeme $SO(3)$. Ak chceme opísať dynamiku pohybu tuhého telesa, potrebujeme diferenciálne rovnice a teda aj diferencovať na množine jeho polôh. Táto množina však nie je prirodzene vnorená do $\mathbb{E}^3$.

1.4. Príklad. Projektívny priestor (reálny) $\mathbb{RP}(n)$. Je to priestor priamok v $\mathbb{R}^{n+1}$, prechádzajúcich počiatkom. Možno ho chápať ako faktorový priestor n-rozmernej sféry $\mathbb{S}^n$, vzniknutej stotožnením protiľahlých bodov.

1.5. Pohyb po hladine energie. Dynamika konzervatívneho mechanického systému (t.j. systému v ktorom sa zachováva celková mechanická energia) sa opisuje systémom $2n$ diferenciálnych rovníc pre vektor polohy $q = (q_1, \ldots, q_n)$ a vektor hybnosti $p = (p_1, \ldots, p_n)$

$$\begin{aligned} \dot{q} &= D_p H(q,p) \\ \dot{p} &= -D_q H(q,p), \end{aligned} \tag{1.5}$$

kde je H *Hamiltonova funkcia*, alebo *Hamiltonián.*

Ľahko sa presvedčíme, že ak $q(t)$, $p(t)$ je riešenie (1.5), potom

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(q(t),p(t)) = &D_q H(q(t),p(t)) D_p H(q(t),p(t)) - \\ &D_p H(q(t),p(t)) D_q H(q(t),p(t)) = 0. \end{aligned}$$

Pohyb sa teda deje po *hladinách energie* $H =$ const. Ak by sme vedeli chápať systém (1.5) ako rovnicu na energetickej hladine (ktorá vo všeobecnosti nemá lineárnu štruktúru), znížili by sme dimenziu rovnice o jednotku. Rozličné symetrie v systéme často vedú k ďalším integrálom pohybu, vďaka ktorým možno dimenziu rovnice ďalej znižovať.

1.6. Príklad.. Analogicky s m-rozmernou rovinou v $\mathbb{R}^n$, ktorá je daná $n-m$ lineárne nezávislými afinnými rovnosťami možno hladkú m-rozmernú plochu chápať ako množinu zadanú $n-m$ rovnosťami, ktorých linearizácie (= diferenciály) sú v každom jej bode lineárne nezávislé.

Od "hladkej plochy" v $\mathbb{R}^n$ očakávame:

- aby "lokálne vyzerala" ako lineárny priestor
- aby v každom bode mala lineárny "dotykový priestor", t.j. aby pre každé $x_0 \in M$ existoval lineárny podpriestor L taký, že ak $\gamma : [0,1] \to M$ je diferencovateľná krivka taká, že $\gamma(0) = x_0$, potom existuje $v \in L$ taký, že $\dot\gamma(0) = v$.
- že na M vieme diferencovať, t.j. povedať, čo je diferencovateľná krivka v M, čo je diferencovateľná funkcia $M \to \mathbb{R}$, čo je vektorové pole, atď.

1.7. Cvičenia.

1. V príklade 1.1 odvoďte prvý variant diferenciálnej rovnice kyvadla z druhého variantu.
2. Odvoďte rovnicu priestorových kmitov jednoduchého kyvadla. Čo je jeho stavový priestor?
3. Čo je priestor polôh tuhého telesa, ktoré nie je upevnené v bode?

2. Variety v $\mathbb{R}^n$

V tejto kapitole uvedieme triedu podmnožín $\mathbb{R}^n$, ktoré spĺňajú našu predstavu o diferencovateľných plochách z predchádzajúcej kapitoly a možno na nich zaviesť diferencovateľnú štruktúru.

2.1. Definícia. Nech $r \geq 1$. Množinu M nazývame *triviálnou m-rozmernou C^r varietou v $X = \mathbb{R}^n$*, ak existuje rozklad $X = Y \oplus Z$ na lineárne podpriestory, $\dim Y = m$, otvorená podmnožina $V \subset Y$ a zobrazenie $\varphi \in C^r(V, Z)$ také, že

$$M = \{\Phi(y) : y \in V\},$$

kde $\Phi(y) = y + \varphi(y)$. Dimenziou variety M nazývame dimenziu priestoru Y.

Označme P prirodzenú projekciu

$$P(y+z) = y \qquad \text{pre } y \in Y,\ z \in Z.$$

Zrejme P je homeomorfizmus $M \to V$, (a teda M "vyzerá" ako Y). Všimnime si, že

$$\Phi \circ P|_M = id|_M,\ P \circ V = id.$$

P nazveme *mapou* na M (čo je veľmi prirodzené a výstižné). Funkciu $f : M \to \mathbb{R}$ nazveme *diferencovateľnou*, ak je $f \circ \Phi : V \to \mathbb{R}$ diferencovateľná. Krivku $\gamma : I \to M$ nazveme diferencovateľnou, ak je $P \circ \gamma$ diferencovateľná.

Všimnime si, že izomorfizmom Φ sme diferencovateľnú štruktúru z Y preniesli na M.

Dotykovým (*tangenciálnym*) priestorom k M v bode x prirodzene chápeme priestor dotykových vektorov v bode x k diferencovateľným krivkám v M, prechádzajúcim cez bod x. Budeme ho označovať T_xM.

Nech $\gamma : [0,1] \to M$ je diferencovateľná krivka, $\gamma(0) = x$.

Platí $\gamma(t) = \Phi(P\gamma(t)) = P\gamma(t) + \varphi(P\gamma(t))$ a teda

$$\begin{aligned} D\gamma(0) &= D(P\gamma)(0) + D\varphi(Px)D(P\gamma)(0) \\ &= D\Phi(Px)D(P\gamma)(0). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Z (2.1) je zrejmé, že T_xM je lineárny priestor dimenzie $\leq \dim Y$. Dôkaz toho, že $\dim T_xM = \dim Y$ ponechávame ako cvičenie.

Nech $m = \dim Y$. Ak si v podpriestore Y zvolíme bázy, priradí zobrazenie P každému bodu x z M m-ticu čísel, ktoré môžeme považovať za "súradnice" bodu x. Preto nazývame P aj *súradnicovým zobrazením*.

Vďaka tomu, že sme pomocou zobrazení Φ, P otázku diferencovateľnosti funkcie redukovali na túto otázku pre funkcie $f \circ \Phi$ na lineárnom priestore, zachovávajú sa podstatné vlastnosti množiny diferencovateľných funkcií (napr. že je lineárna kombinácia a súčin diferencovateľných funkcií je opäť diferencovateľná funkcia, atď.).

Diferencovateľnosť funkcií a kriviek je lokálna vlastnosť. Preto možno diferencovanie rozšíriť na množiny, ktoré sú triviálnymi varietami *lokálne*.

2.2. Definícia. Množinu $M \subset X = \mathbb{R}^n$ nazveme C^r varietou v X, ak ku každému $x \in M$ existuje okolie U bodu x v M také, že U je triviálnou varietou v X. Dvojice (U, P) (kde P je inverzia Φ z Definície 2.1) nazývame *lokálnymi mapami*, ich množinu nazývame *atlasom*.

Definíciu diferencovateľnej funkcie môžeme teraz preniesť aj na diferencovateľnú varietu v zmysle Definície 2.2.

Funkciu $f : M \to \mathbb{R}$ nazveme teda C^r-diferencovateľnou v bode $x \in M$, ak je f diferencovateľná ako funkcia z nejakej triviálnej variety atlasu, do ktorej x patrí.

Aby táto definícia mala dobrý zmysel, žiada sa, aby diferencovateľnosť v zmysle dvoch pretínajúcich sa triviálnych variet - či máp - bola totožná. To nám zabezpečí

2.3 Veta. 1. Ak funkcia je diferencovateľná v bode x v zmysle nejakej mapy, potom je diferencovateľná v tomto bode v zmysle ľubovoľnej inej mapy, obsahujúcej x.
2. Ak M je súvislá, potom všetky mapy majú rovnakú dimenziu, ktorú nazveme dimenziou variety M.

Dôkaz. 1. Nech (U_1, P_1), (U_2, P_2) sú dve mapy také, že $x \in U_1 \cap U_2$; označíme $\Phi_i = (P_i|_{U_i})^{-1}$. Nech f je diferencovateľná v bode x v zmysle (U_1, P_1), t.j. $f \circ \Phi_1$ je diferencovateľná v bode $P_1(x)$. Pretože U_1, U_2 sú otvorené v M, je aj $U_1 \cap U_2$ otvorená v M; platí

$$(f \circ \Phi_2)(P_2(x)) = (f \circ \Phi_1) \circ (P_1 \circ \Phi_2) \circ (P_2(x)). \tag{2.2}$$

Funkcia na pravej strane (2.2) je ako kompozícia diferencovateľných funkcií diferencovateľná, teda je diferencovateľná aj funkcia na ľavej strane (2.1).
2. Ak (U_1, P_1), (U_2, P_2) $P_1 : U_1 \to Y_1$, $P_2 : U_2 \to Y_2$ sú mapy a $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, potom

$$\begin{aligned} P_1(U_1 \cap U_2) &\quad \text{je otvorená v } Y_1 \\ P_2(U_1 \cap U_2) &\quad \text{je otvorená v } Y_2. \end{aligned}$$

Platí však

$$\begin{aligned} P_1(U_1 \cap U_2) &= P_1 \circ \Phi_2 \circ P_2(U_1 \cap U_2), \\ P_2(U_1 \cap U_2) &= P_2 \circ \Phi_1 \circ P_1(U_1 \cap U_2). \end{aligned}$$

Otvorené množiny $P_1(U_1 \cap U_2)$ a $P_2(U_1 \cap U_2)$ v Y_1 resp Y_2 sú teda homeomorfné, z čoho vyplýva, že Y_1 a Y_2 majú rovnakú dimenziu.

Dimenzia je teda na M definovaná nezávisle od mapy a je lokálne konštantná. Z toho vyplýva, že je konštantná na každej komponente súvislosti M.

Ukážeme si teraz, že "plocha", daná implicitne sústavou rovníc je varietou, ak je splnená istá podmienka nedegenerovaosti rovníc.

2.4. Veta. Nech $X = \mathbb{R}^n$ a nech $G \in C^r(X, \mathbb{R}^{n-m})$, $0 \leq m \leq n$. Predpokladajme, že 0 je regulárnou hodnotou G, t.j. hodnosť $DG(x)$ je $n - m$ ak $G(x) = 0$. Potom množina

$$M = \{x : G(x) = 0\}$$

je m-rozmernou C^r varietou v X.

Dôkaz. Označme $G_1, \dots, G_{n-m}$ zložky zobrazenia G.

Nech $G(x_0) = 0$. Bez újmy na všeobecnosti predpokladajme, že

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial G_{m+1}}{\partial x_{m+1}}(x_0) & \dots & \frac{\partial G_{m+1}}{\partial x_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial G_n}{\partial x_{m+1}}(x_0) & \dots & \frac{\partial G_n}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Označme

$$\begin{aligned} Y &= \{x : x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0\} \\ Z &= \{x : x_1 = \dots = x_m = 0\}. \end{aligned}$$

Platí $Y \oplus Z = X$. Podľa Vety o implicitnej funkcii (I.4.1) existujú okolia U bodu $y_0 = (x_{01}, \dots, x_{on}, 0, \dots, 0)$ v Y a V bodu $x_0 = (y_0, z_0)$ v X, $z_0 = (0, \dots, 0, x_{0,m+1}, \dots, x_{on})$ a funkcia $\varphi : U \to Z$ také, že $x \in M \cap U = (\{G(y, z) = 0\} \cap U)$ práve vtedy, ak $z = \varphi(y)$. To značí, že $M \cap U$ je triviálnou varietou v X.

2.5. Príklady. Kružnica $\mathbb{S}$ v $\mathbb{R}^2$ je daná rovnicou $G(x_1, x_2) = 0$, kde $G(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$. Ak $(x_1, x_2) \in \mathbb{S}$, potom buď $x_1 \neq 0$, alebo $x_2 \neq 0$ a platí

$$\text{hod } (DG(x_1, x_2)) = \text{ hod } (2x_1, 2x_2) = 1.$$

Sú teda splnené predpoklady Vety 2.4, z čoho vyplýva, že $\mathbb{S}$ je varietou v $\mathbb{R}^2$ dimenzie 1.

Varietu $\mathbb{S}$ môž'me pokryť štyrmi mapami - triviálnymi varietami, a to $(U_i^{\pm}, P_i^{\pm})$, $i = 1, 2$, kde

$$\begin{aligned} U_1^{\pm} &= \left\{ (x_1 \pm \sqrt{1 - x_2^2}, x_2) : -1 < x_1 < 1 \right\}, \ P_1^{\pm}(x_1, x_2) = x_1 \\ U_2^{\pm} &= \left\{ (\pm\sqrt{1 - x_2^2}, x_2) : -1 < x_2 < 1 \right\}, \ P_2^{\pm}(x_1, x_2) = x_2. \end{aligned}$$

Na druhej strane, množina $x_1^2 - x_2^2 = 0$ nie je varietou, pretože v okolí jej bodu $(0, 0)$ nie je triviálnou varietou (dôkaz prenechávame ako cvičenie).

Množina $x_1^2 + x_2^2 = 0$ je síce (nulrozmerná) varieta, ale jej dimenzia je iná, než by vyplývala z Vety 2.4.

2.6. Príklad. Varieta $SO(3)$.

Podľa príkladu 1.3 môžeme množinu polôh tuhého telesa, upevneného v jednom bode stotožniť s množinou unitárnych 3×3 matíc, ktorá sa označuje $SO(3)$. Priestor všetkých 3x3 matíc je 9-rozmerný lineárny priestor $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \cong \mathbb{R}^9$ a

$$SO(3) = \{A : G(A) = 0\},$$

kde $G(A) = AA^T - I$.

Zobrazenie G je zobrazením $\mathbb{R}^9$ do 6-rozmerného priestoru symetrických matíc. Z Vety 2.4 vyplynie, že $SO(3)$ je trojrozmerná varieta, ak dokážeme, že pre ľubovoľné $A \in SO(3)$ má $DG(A)$ plnú hodnosť 6, alebo ekvivalentne, že je surjektívne.

Platí

$$G(A+\vartheta\delta A) = (A+\vartheta\delta A)(A+\vartheta\delta A)^T - I = AA^T - I + \vartheta(\delta AA^T + A(\delta A)^T) + o(\vartheta),$$

z čoho vyplýva

$$DG(A)\delta A = \delta AA^T + A(\delta A)^T.$$

Aby sme dokázali, že $DG(A)$ je surjektívne, treba k ľubovoľnej symetrickej matici C nájsť takú maticu δA, že

$$\delta AA^T + A(\delta A)^T = C.$$

Ak $A \in SO(3)$, potom A je zrejme regulárna, môžeme teda definovať $\delta A = \frac{1}{2}C(A^T)^{-1}$. Platí

$$\delta AA^T + A(\delta A)^T = \frac{1}{2}(C^T + C) = C,$$

čím je dôkaz ukončený.

2.8. Cvičenia.

1. Dokážte, že $\dim T_xM = \dim M$.
2. Dokážte analógiu častí 1 Vety 2.3 pre krivky - diferencovateľnosť krivky v diferencovateľnej variete nezávisí od voľby máp.
3. Zistite, pre aké a, b, c, d sú varietami v $\mathbb{R}^2$ množiny
   a) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 = d\}$
   b) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^3 = c\}$
   c) $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^4 - x_1^2 + x_2^2 = c\}$.

   Ak sú varietou, nájdite pre ne atlas.
4. Ak $M = \{x : G(x) = 0\}$, kde G je ako vo Vete 2.4, dokážte, že

   $$T_xM = \{\delta x : DG(x)\delta x = 0\}.$$

   Vysvetlite geometrický význam T_xG.
5. Nájdite T_xM pre nejaký z bodov variet z Cvičenia 3.
6. Dokážte, že množina diferencovateľných funkcií v zmysle 2.2 spĺňa obvyklé požiadavky:
   a) tvoria lineárny priestor
   b) ak f, g sú diferencovateľné, potom aj fg je diferencovateľná.

3. Abstraktné diferencovateľné variety

3.1. Potreba zavedenia pojmu abstraktnej variety. Ako prípravný krok k zavedeniu pojmu diferencovateľnej variety sme v predchádzajúcej kapitole zaviedli varietu ako podmnožinu v $\mathbb{R}^n$. Takto napríklad vieme, že kružnica je varieta v $\mathbb{R}^2$. Kružnicu si však môžeme predstaviť aj ako faktorovú množinu $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, čo nie je podmnožina nijakého lineárneho priestoru. Napriek tomu máme dojem (a vlastne aj potrebu) na nej diferencovateľnú štruktúru zaviesť.

V tejto kapitole ukážeme, ako možno zaviesť diferencovateľnú štruktúru na množinách, ktoré a priori nemusia byť podmnožinami $\mathbb{R}^n$ pre nijaké n a ukážeme, že definície sú v súlade s definíciami z predchádzajúcej kapitoly ako špeciálnym prípadom.

3.2. Definícia. Nech M je topologický priestor, vyhovujúci druhej axióme spočítateľnosti. *Lokálnou mapou* na M nazveme dvojicu (U, φ), kde U je otvorená podmnožina M a φ je homeomorfizmus U na otvorenú podmnožinu $\mathbb{R}^n$ pre nejaké n. Dve mapy (U_1, φ_1), (U_2, φ_2) nazveme C^r *kompatibilnými* ak je $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \varphi_2(U_1 \cap U_2) \to \varphi_1(U_1 \cap U_2)$ C^r-difeomorfizmus. C^r*-atlasom* na M nazveme pokrytie M C^r kompatibilnými mapami.

Atlas na M definuje na M diferencovateľnú štruktúru v zmysle Kapitoly 2 - vyčlení z množiny fukcií $M \to \mathbb{R}$ množinu *diferencovateľných* funkcií, ktoré spĺňajú obvyklé požiadavky (Cvičenie 2.8.6).

Funkciu $f : M \to \mathbb{R}$ nazveme *diferencovateľnou* v bode $x \in M$, ak existuje mapa (U, φ) taká, že $x \in U$ a $f \circ \varphi^{-1}$ je diferencovateľná v bode $\varphi(x)$.

Zobrazenie je: $I \to M$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je interval, nazývame C^r*-diferencovateľnou krivkou*, ak pre ľubovoľné $t \in I$ existuje mapa (U, φ) taká, že $\gamma(t) \in U$ a $\varphi \circ \gamma$ je diferencovateľná v bode t.

Prenechávame na čitateľa, aby si overil, že pre abstraknú varietu platí Veta 2.5 i Cvičenie 2.8.2.

Difencovateľnou štruktúrou na množine M nazývame množinu diferencovateľných funkcií, spĺňajúcich obvyklé axiómy (Cvičenie 2.8.6). Tá istá diferencovateľná štruktúra môže samozrejme byť generovaná rozličnými atlasmi. Kedy to je, zodpovie nasledovná

3.3 Veta. Dva atlasy generujú rovnakú diferencovateľnú štruktúru práve vtedy, ak je ich zjednotenie opäť atlasom, alebo ekvivalentne, ak sú všetky mapy jedného kompatibilné so všetkými mapami druhého.

Dôkaz. Skutočnosť, že atlasy s navzájom kompatibilnými mapami definujú rovnakú diferencovateľnú štruktúru je bezprostredným dôsledkom toho, že funkcia diferencovateľná v zmysle nejakej mapy je diferencovateľná v zmysle kompatibilnej mapy.

Aby sme dokázali obrátenú implikáciu, potrebujeme pre dve nekompatibilné mapy nájsť funkciu $M \to \mathbb{R}$, ktorá je diferencovateľná v zmysle jednej, ale nie v zmysle druhej z nich. Nech $(U, \varphi), (V, \psi)$ sú mapy na M, $\dim M = n$, ktoré nie sú kompatibilné. Potom existuje bod $x \in U$ taký, že aspoň jedna z funkcií $\psi_i \circ \varphi^{-1}$, $i = 1, \ldots, n$, nie je diferencovateľná v bode $\varphi(x)$; bez ujmy na všeobecnosti nech je to $\psi_1 \circ \varphi^{-1}$. Funkcia ψ_1 je zrejme diferencovateľná v zmysle mapy V (pretože $\psi_1 \circ \psi^{-1} : \psi(V) \to \mathbb{R}^n$ je prirodzená projekcia $y = (y_1, \ldots, y_n) \mapsto y_1$) ale nie v zmysle mapy (U, φ). Zostáva dokázať, že funkciu ψ_1, definovanú na V, možno z okolia bodu x rozšíriť na diferencovateľnú funkciu na M.

Tá je bezprostredným dôsledkom nasledovnej lemy.

3.4. Lema. Nech f je diferencovateľná funkcia na okolí U bodu $x^0 \in M$. Potom existujú okolia $U_1 \subset U_2 \subset U$ bodu $x^0 \in M$ a C^r-diferencovateľná funkcia $\tilde{f} : M \to \mathbb{R}$ taká, že $f = \tilde{f}$ na U_1 a $\tilde{f}$ je konštantná na $M \setminus U_2$.

Dôkaz. Označme $\Theta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ "hrboľovú" funkciu s vlastnosťami

1. Θ je C^∞
2. $\Theta(\xi) \equiv 1$ pre $0 \leq \xi \leq 1$
3. $\Theta(\xi) \equiv 0$ pre $\xi \geq 2$.

Konštrukcia takejto funkcie je predmetom Cvičenia

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že (U, φ) je mapa. Nech $\epsilon > 0$ je také, že

$$\overline{G(\varphi(x^0), 2\epsilon)} \subset \varphi(U).$$

Definujeme $\tilde{f}$ predpisom

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \psi_1(x)\Theta(\epsilon^{-1}(\varphi(x) - \varphi(x^0))) \text{ pre } x \in \varphi^{-1}\overline{(G(x^0), 2\epsilon)} \\ 0 \text{ inak} \end{cases}.$$

Je zrejmé, že $\tilde{f}$ má požadované vlastnosti.

3.5. Maximálny atlas. Medzi atlasmi a diferencovateľnými štruktúrami nie je jedno-jednoznačná korešpondencia podobne, ako nie je jedno-jednoznačná korešpondencia medzi topológiami a systémami okolí, ktorá ju generuje. Existuje však atlas, ktorý diferencovateľnej štruktúre zodpovedá jedno-jednoznačne. Je to *maximálny atlas*, ktorý definujeme, ako zjednotenie všetkých máp, kompatibilných s daným atlasom.

Podobne, ako v prípade topológie a okolí, pri narábaní s varietami plne dostačuje pracovať s ktorýmkoľvek s kompatibilných atlasov, generujúcich tú-ktorú diferencovateľnú štruktúru. Atlas možno podľa potreby rozširovať o vhodné kompatibilné mapy.

3.6. Príklad. Kružnica $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Prvkami takto chápanej kružnice sú triedy ekvivalencie $[t]$ reálnych čísel $t \in \mathbb{R}$,

$$[t] = \{\tau : \tau - t \in \mathbb{Z}\}.$$

K danej triede $[t]$, kde t je ľubovoľný jej reprezentant, definujeme mapu (U_t, φ_t), kde

$$U_t = \left\{[\tau] : |\tau - t| < \frac{1}{2}\right\}$$
$$\varphi_t(\tau) = \tau.$$

Je zrejmé, že množiny U_t sú homeomorfizmy a že pokrývajú $\mathbb{S}$. Ukážeme, že sú kompatibilné a tým tvoria atlas.

Nech (U_t, φ_t), (U_s, φ_s) sú dve mapy. Existuje $k \in \mathbb{Z}$ také, že $|t + k - s| < 1/2$. Platí $U_t \cap U_s = \left\{[\tau] : |\tau - t| < \frac{1}{2} \text{ a } |\tau + k - s| < \frac{1}{2}\right\}$,

$$\varphi_s \circ \varphi_t^{-1}(\tau) = \tau + k \qquad \text{pre } \tau \in \varphi_t(U_t \cap U_s)$$

čo je zrejme C^r pre ľubovoľné $r \geq 0$.

Všimnime si, že na rozdiel od atlasu z 2.6, tvoreného triviálnymi varietami, na pokrytie $\mathbb{S}$ nám stačili 2 mapy.

3.7. Príklad. Stereografická projekcia.

Ukážeme, že aj kružnicu, chápanú ako podmnožinu $\mathbb{R}^n$ môžeme pokryť dvoma mapami. Nech $\mathbb{S} = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Každému bodu (x,y) z $\mathbb{S}$ okrem bodu $(0,1)$ priradíme x-ovú súradnicu ξ priesečníku priamky, spájajúcej body $(0,1)$ a (x,y) s rovinou $y = -1$ (obr..).

Označme teda $U = \{(x,y) \in \mathbb{S} : y \neq 1\}$ a $\varphi(x,y) = \xi$ pre $(x,y) \in U$.

Body (ξ,η) priamky spájajúcej body $(0,1)$ a (x,y) sú určené rovnicami $\xi = tx,\ \eta = 1 + t(y-1)$. Ak položíme $\eta = -1$, dostaneme elimináciou t pre ξ predpis

$$\varphi(x,y) = \xi = \frac{-2x}{y-1}.$$

Je zrejmé, že φ je homeomorfizmus $\mathbb{S}\backslash\{(0,1)\} \to \mathbb{R}$. Mapu (U,φ) doplníme do atlasu mapou (V,ψ), ktorú dostaneme z mapy (U,φ) zámenou $y \mapsto -y$. Ponechávame na čitateľa, aby si overil, že $\varphi \circ \psi^{-1}(\xi) = 4/\xi$, čo je C^r pre ľubovoľné $r \geq 0$ pre $\xi \in \mathbb{R} - \{0\} = \psi(U \cap V)$.

3.8. Príklad. Reálny projektívny priestor $\mathbb{RP}(n)$.

Môžeme ho chápať alternatívne ako množinu priamok v $\mathbb{R}^{n+1}$, prechádzajúcich počiatkom (teda faktorový priestor priestoru $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ tried ekvivalencie stotožnenia
$(x_0,\dots,x_n) \cong (x'_0,\dots,x'_n)$, ak existuje $c \neq 0$ také, že $x_i = cx_i,\ i = 0,\dots,n)$, alebo ako faktorový priestor sféry $\mathbb{S}^n = \{(x_0,\dots,x_n) : |x_0|^2 + \cdots + |x_n|^2 = 1\}$ stotožnenia $\{(x_0,\dots,x_n) \cong (-x_0,\dots,-x_n)\}$.

Za mapy na $\mathbb{RP}(n)$ vezmeme jeho *afinné podpriestory* $U_i = \{[x_0,\dots,x_n] : x_i \neq 0\}$ so zobrazeniami $\varphi_i([x_0,\dots,x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i},\dots,\frac{x_{i-1}}{x_i},\frac{x_{i+1}}{x_i},\dots,\frac{x_n}{x_i}\right)$. Dôkaz toho, že (U_i,φ_i) sú kompatibilné, prenechávame na čitateľa.

3.9. Príklad. Eulerove uhly

Klasickou mapou na $SO(3)$ (Príklad 2.7) sú Eulerove uhly: Poloha tuhého telesa, upevneného v bode je daná polohami e'_1, e'_2, e'_3, do ktorých sa premiestnia po rade vektory e_1, e_2, e_3 ortonormálnej bázy (obr..):

Toto premiestnenie môžeme reprezentovať troma uhlami:

φ - uhlom pootočenia okolo e_3 pri ktorom sa e_1 premiestni do normály n k rovine vytvorenej vektormi e_3 a e_3' (toto pootočenie nechá e_3 na mieste)

θ - uhlom pootočenia okolo n, pri ktorom sa e_3 premiestni do e_3'; vzhľadom na kolmosť vektorov bázy sa rovina e_1e_2 premiestni do roviny $e_1'e_2'$

ψ - uhlom pootočenia okolo e_3', ktoré premiestni e_1 do e_1' a tým aj e_2 do e_2'.

Všimnime si, že mapa Eulerových uhlov nemôže pokryť nevychýlenú polohu, pretože v tejto polohe nie je rovina e_3e_3' jednoznačne definovaná.

3.10. Príklad. Tórus a Kleinova fľaša

n-rozmerný tórus $\mathbb{T}^n$ je definovaný ako kartézsky súčin n kružníc, teda

$$\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ krát}}.$$

Môžeme si ho predstaviť ako n-rozmernú kocku so stotožnenými stenami. Atlas na ňom môžeme vytvoriť z kartézskych súčinov máp na $\mathbb{S}^1$.

Tórus $\mathbb{T}^2$ si môžeme predstaviť aj v $\mathbb{R}^3$ ako valcovú plochu so stotožnenými základňami (obr..)

V prípade dvoch kružníc $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ môžeme stotožnenie vykonať inak:
položíme

$$(x, y) \cong (x + 1, -y).$$

Výsledkom je dvojrozmerná varieta nazývaná Kleinovou fľašou. Na rozdiel od $\mathbb{T}^2$ nie je táto varieta varietou v $\mathbb{R}^3$.

3.11. Príklad. Trojuholník

Trojuholník na prvý pohľad odporuje našej predstave o variete ako hladkej ploche. Skutočne, nie je varietou v $\mathbb{R}^2$ v zmysle Kapitoly 2. Ukážeme však, že mu možno dať štruktúru abstraktnej diferencovateľnej variety a to takto: Nech

$$\begin{aligned} M =& \bar{M}_1 \cup \bar{M}_2 \cup \bar{M}_3, \text{ kde} \\ &M_1 = \{(x, y) : -1 < x < 1,\ y = 0\} \\ &M_2 = \{(x, y) : 0 < x < 1,\ y = 2 - 2x\} \\ &M_3 = \{(x, y) : -1 < x < 0,\ y = 2x + 2\}. \end{aligned}$$

Označíme $M_{ij} = M_i \cup M_j \cup \{$ vrchol medzi nimi$\}$ a φ_{ij} ortogonálnu projekciu M_{ij} na rovnobežku so stranou s M_k, $k \neq ij$ a ako mapy atlasu na M vezveme dvojice (M_{ij}, φ_{ij}). Pre $i \neq k$ platí $M_{ij} \cap M_{jk} = M_j$ a $\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk}^{-1}$ je kompozícia projekcie úsečky na priamku, ktorá nie je na úsečku kolmá a inverzie k takémuto zobrazeniu, čo je zrejme diferencovateľné zobrazenie.

3.12. Zobrazenia medzi varietami.

Nech M, N sú C^r-variety. Zobrazenie $F : M \to N$ nazveme C^r-diferencovateľným v bode $x \in M$, ak existujú mapy (U, φ) na M, (V, ψ) na N také, že $x \in U$, $F(x) \in V$ a $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ je C^r-diferencovateľné v bode $\varphi(x)$.

3.13. Poznámky.

1. Každá varieta v $\mathbb{R}^n$ v zmysle Kapitoly 2 je varietou v zmysle 3.2. Naopak, podľa Whitneyovej vety o vnorení je každá varieta dimenzie n varietou v $\mathbb{R}^{2n+1}$.

2. Kedy považovať variety za rovnaké? Príklad kružnice, ktorú môžeme chápať ako $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ rovnako ako podmnožinu $\mathbb{R}^2$ ukazuje, že sa nemôžeme obmedziť na to, aby sme za rovnaké považovali iba variety, ktoré majú rovnakú množinu a rovnakú topologickú štruktúru. Prirodzené je považovať za rovnaké dve C^r-variety vtedy, ak sú navzájom C^r-difeomorfné, t.j. ak existuje medzi nimi C^r-diferencovateľné zobrazenie, majúce inverzné, ktoré je opäť C^r-diferencovateľné.

To navodzuje otázku, či (topologicky) rovnakú množinu M možno vybaviť dvoma rozličnými diferencovateľnými štruktúrami tak, aby výsledné diferencovateľné variety neboli C^1-ekvivalentné. Okolo roku 1960 dokázal S. Smale, že toto je možné pre štvorrozmernú sféru $\mathbb{S}^4$, dokonca že na $\mathbb{S}^4$ existuje nekonečne veľa neekvivalentných diferencovateľných štruktúr.

3.14. Cvičenia.

1. Dokážte, že ak je f diferencovateľná v zmysle jednej mapy, potom je diferencovateľná v zmysle každej mapy, ktorá je s ňou kompatibilná v zmysle 3.2.
2. Definujte atlas na kružnici $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, zodpovedajúci atlasu stereografickej projekcie z 3.7.
3. Nájdite atlas na $\mathbb{T}^2$ s minimálnym počtom máp.
4. Dokážte, že varieta v $\mathbb{R}^n$ v zmysle Kapitoly 2 je abstraktnou varietou v zmysle 3.2.
5. Dokážte analógiu Vety 2.3 a Cvičenia 2.8.2 pre abstraktné variety.
6. Skonštruujte funkciu Θ z Lemmy 3.4.[Návod: Definujte $\Theta(\xi)$ ako integrál z funkcie $ae^{b(\xi-p)}e^{c(\xi-q)}$ s vhodne zvolenými a, b, c, p, q.]
7. Dokážte, že trojuholník z Príkladu 3.10 nie je varietou v $\mathbb{R}^2$ v zmysle Kapitoly 2.
8. Dokážte, že $\mathbb{T}^n$, $\mathbb{S}^n$ a $\mathbb{RP}(n)$ sú kompaktné variety.

4. Podvarieta

4.1. Dve alternatívy pojmu podvariety.

Podobne ako u iných štruktúr, potrebujeme aj v prípade variety definovať, kedy jej podmnožina dedí štruktúru pôvodnej variety - podvarietu. Kým v prípade topologického, lineárneho, a iných priestorov je tento pojem jednoznačný, v prípade variety máme na tento pojem dve alternatívy.

Podvarieta totiž podobne ako varieta má "lokálne" vyzerať ako otvorená podmnožina v $\mathbb{R}^n$. Rozdiel v alternatívach je ten, ako chápeme slovo "lokálne" - či v topológii pôvodnej variety, alebo jej podmnožiny.

Napr. na obr. môžeme množinu N považovať za regulárny injektívny obraz priamky. Okolie V bodu x v N v indukovanej topológii je triviálnou varietou, nie je však okolím v relatívnej topológii.

4.2. Imerzná podvarieta. Nech M je C^r-varieta. Podmnožina $N \subset M$ sa nazýva (C^r-)*imerznou podvarietou* dimenzie p variety M, ak existuje C^r-varieta R a C^r-regulárna injekcia $F : R \to M$ taká, že $N = F(R)$.

(Zobrazenie $F : R \to M$ nazývame *regulárnym*, ak pre každé $x \in R$ existuje mapa (U, φ) na M a mapa (V, ψ) na R taká, že $F(x) \in U$ a hodnosť $D(\varphi \circ F \circ \psi^{-1})(\psi(x)) = p$.)

Atlas na N definujeme ako zjednotenie dvojíc $(F(U), \varphi \circ F^{-1})$, kde (U, φ) sú mapy na R. Ponechávame na čitateľa, aby dokázal, že takto definované mapy na N sú kompatibilné.

4.3. Vnorená varieta. Podmnožina $N \subset M$ C^r-diferencovateľnej variety M, $\dim M = m$, sa nazýva *vnorenou podvarietou* variety M, ak ku každému $x \in N$ existuje mapa (U, φ) v M taká, že $x \in U$ a $\varphi(N \cap U)$ je triviálnou varietou v $\mathbb{R}^m$; atlas na N definujeme v zmysle Definície 2.2.

Prenechávame na čitateľa, aby si overil, že takto definované mapy na N sú kompatibilné a teda N je C^r-varieta.

Veta. *Vnorená podvarieta je imerznou podvarietou. Naopak, imerzná podvarieta je vnorenou podvarietou práve vtedy, ak topológia na nej, indukovaná definujúcou imerziou je totožná s jej relatívnou topológiou vzhľadom na M.*

Dôkaz. Nech N je vnorenou varietou v M, $\dim N = n$. Označíme $i : N \to M$ inklúziu N do M. Zrejme i je injekcia. Nech $x \in N$ a nech (U, φ) je mapa na M taká, že $x \in U$ a $\varphi(N \cap U)$ je triviálna varieta v $\mathbb{R}^m$ (dimenzie n). Nech Y, Z, Φ, P definujú túto varietu v zmysle Definície 2.1. Označme $V = N \cap U$, $\psi = P \circ \varphi|_V$. Potom (V, ψ) je mapa na N a platí

$$\varphi \circ i \circ \psi^{-1} = \varphi \circ (P \circ \varphi|_V)^{-1} = \Phi$$

(obr..)

Keďže Φ má maximálnu hodnosť n, N je imerznou varietou.

Nech teraz $N \subset M$ je imerznou varietou definovanou zobrazením $F : R \to N$, $\dim R = n$. Dokážeme najprv. že indukovaná topológia je vždy silnejšia, ako relatívna.

Keďže F je spojité, je pre každú otvorenú množinu $U \subset M$ množina $F^{-1}(U \cap N)$ otvorená a tým je množina $U \cap N = F \circ F^{-1}(U \cap N)$ otvorená v topológii indukovanej F.

Nech $x \in N$, $x = F(p)$. Z Definície 4.2 vyplýva, že existujú mapy $(U, \varphi) \in M$ a $(V, \psi) \in P$ také, že $\varphi \circ F \circ \psi^{-1}$ je homeomorfizmus $\psi(V) \to (\varphi \circ F(V))$. Ak je indukovaná topológia totožná s vnorenou , je množina $F(V)$ prienikom otvorenej množiny z M s varietou N; bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať $F(V) = U \cap N$. Označme $\tilde{F} = \varphi \circ F \circ \psi^{-1}$, $\tilde{F} = (F_1, \ldots, F_m)^T$. Keďže $\tilde{F}$ má podľa predpokladu hodnosť n, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že

$$D((F_1, \ldots, F_n)^T)(\psi(p)) \text{ je regulárny.} \tag{4.1}$$

Označme
$Y = \{y \in \mathbb{R}^m : y_{m-n+1} = \cdots = y_m = 0\}$, $Z = Y^\perp$ a π_Y prirodzenú projekciu $Y \oplus Z \to Y$. Potom (4.1) značí, že $D(\pi_Y \circ \tilde{F})(\psi(p))$ je regulárny. Podľa vety o inverznej funkcii (I.4.1.7) môžeme teda okolie V zvoliť tak malé, že existuje C^r-funkcia g taká, že $g \circ \pi_Y \circ \tilde{F}$ je identita na $\psi(V)$.

Označíme $\Phi = \tilde{F} \circ g$. Potome zrejme $\varphi(N \cap U) = \Phi(\pi_Y \circ \tilde{F} \circ \psi(V))$. Keďže $\pi \circ \tilde{F} \circ \psi(V)$ je otvorenou podmnožinou Y, $\varphi(N \cap U)$ je podľa definície 2.1 triviálnou varietou.

4.4. Poznámka. Ak pri podvariete vynecháme prívlastok, budeme tým rozumieť, že ide o podvarietu vnorenú.

4.5. Cvičenia.

1. Vnorená podvarieta variety M dimenzie n sa často definuje ako jej podmnožina N, ku každému bodu ktorej existuje obsahujúca ho mapa (U, φ) na M, v ktorej sa $N \cap U$ zobrazí na otvorenú podmnožinu lineárneho podpriestoru priestoru $\mathbb{R}^n$. Dokážte, že táto definícia je ekvivalentná definícii 4.3.

2. Dokážte, že ak N je vnorenou podvarietou M vtedy a len vtedy, ak je množina diferencovateľných funkcií na N totožná s množinou zúžení na N diferencovateľných funkcií na M.

3. Dokážte, že varieta v $\mathbb{R}^n$ v zmysle Kapitoly 2 je vnorenou varietou v $\mathbb{R}^n$ v zmysle 4.3.

4. Ukážte, že varieta z Cvičenia 2.8.3 c) je pre $c = 0$ imerznou, ale nie vnorenou podvarietou $\mathbb{R}^2$.

5. Orientácia

5.1. Definície. *Orientovaným atlasom* variety nazývame atlas, ktorého každé dve mapy $(U, \varphi), (V, \psi)$ spĺňajú

$$\det D(\varphi \circ \psi^{-1})(\psi(x)) > 0$$

pre každé $x \in U \cap V$. Varietu nazývame *orientovateľnou*, ak má orientovaný atlas. *Orientáciou* variety nazývame takú triedu orientovaných atlasov, že zjednotenie každých dvoch atlasov z nej je opäť orientovaným atlasom.

5.2. Poznámka. Dvojrozmernú orientovanú varietu si môžeme predstaviť ako dvojstrannú plochu, neorientovateľnú ako jednostrannú.

5.3. Cvičenia.

1. Orientovateľná varieta má práve dve orientácie.
2. Každá jednorozmerná varieta je orientovateľná.
3. $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$, $\mathbb{T}^2$ sú orientovateľné variety.
4. Otvorený Möbiov list, ktorý vznikne z $\mathbb{R}^2$ faktorizáciou stotožnenia $(x, y) \cong (x+1, -y)$ je neorientovateľná varieta, rovnako ako Kleinova fľaša.

6. Tangenciálny priestor, tangenciálny fibrovaný priestor, vektorové pole a diferenciál zobrazenia

6.1. Tangenciálny priestor. Z Kapitoly 3 vieme, čo je diferencovateľná funkcia a hladká krivka. Čo je však diferenciálom funkcie? V zmysle časti I by to malo byť lineárne zobrazenie, ktoré každému smeru priraďuje číslo - smerovú deriváciu. Ak ide o varietu v $\mathbb{R}^n$ v zmysle Kapitoly 2, môžeme smery brať z dotykového priestoru T_xM, ktorý podľa 2.1 a Cvičenia 2.8.1 je lineárnym podpriestorom. Abstraktná varieta však nemusí byť a priori v nijakom lineárnom priestore vnorená a preto treba tangenciálny priestor osobitne zostrojiť.

Nech M je diferencovateľná varieta $x \in M$ a nech (U, φ) je mapa na M taká, že $x \in U$ a $\varphi(x) = 0$. Na množine diferencovateľných kriviek, vychádzajúcich z bodu x (teda diferencovateľných zobrazení $\gamma : [0,1] \to M$ takých, že $\gamma(0) = x$) zavedieme ekvivalenciu takto:

$$\gamma_1 \cong \gamma_2, \quad \text{ak } (\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0).$$

Ponechávame na čitateľa, aby si overil, že podmienka $\varphi(x) = 0$ nie je obmedzujúca a že ekvivalencia nezávisí od voľby mapy. Na množine tried ekvivalencie $[\gamma]$, ktorú budeme označovať $\dot\gamma(0)$ zavedieme lineárnu štruktúru predpisom

$$\alpha_1\dot\gamma_1(0) + \alpha_2\dot\gamma_2(0) = \frac{d}{dt}\left[\varphi^{-1}(\alpha_1\varphi \circ \gamma_1 + \alpha_2\varphi \circ \gamma_2)\right](0).$$

Vektor $\dot\gamma(0)$ nazveme *dotykovým vektorom ku krivke* $\gamma(t)$ *v bode* 0; analogicky označíme $\dot\gamma(t)$ dotykový vektor v bode 0 ku krivke γ_t, definovanej predpisom $\gamma_t(s) = \gamma(t+s)$.

Opäť ponechávame na čitateľa, aby si overil, že takto definovaný priestor je lineárny. Nazveme ho tangenciálnym priestorom M v x, označíme T_xM.

Pomocou mapy (U, φ) v bode x môžeme prvky T_xM reprezentovať vektormi z $\mathbb{R}^n$ takto:

Triede $\dot\gamma(0)$ priradíme vektor

$$X_\gamma = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(0).$$

Ak $\{e_1, \dots, e_n\}$ je báza a $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ sú súradnice v tejto báze v priestore $\mathbb{R}^n$ obrazov zobrazenia φ, definujeme v T_xM vektory

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} = \frac{d}{dt}\left[\varphi^{-1}(te_i)\right](0).$$

Tieto vektory tvoria bázu v T_xM (Cvičenie 6.8.1). Z toho vyplýva, $\dim T_xM = \dim M$.

6.2. Tangenciálny fibrovaný priestor. Nech M je C^r-diferencovateľná varieta, $r \geq 2$ dimenzie n. Množine bodov všetkých jej tangenciálnych priestorov

$$TM = \bigcup x \in M \to UT_xM \tag{6.1}$$

možno dať štruktúru C^{r-1}-diferencovateľnej variety. Túto varietu nazývame tangenciálnym fibrovaným priestorom.

Atlas, definujúci C^{r-1}-diferencovateľnú štruktúru na TM pozostáva z máp $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$, vytvorených z máp (U, φ) na M takto:

$$\tilde{U} = \underset{x \in U}{U} T_xM, \tag{6.2}$$

$$\tilde{\varphi}(\delta x) = (\varphi(x), \xi), \quad \text{kde } \xi = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(0), \tag{6.3}$$

ak

$$\delta x \in T_xM, \quad \delta x = \dot{\gamma}(0),$$

a γ je C^r-krivka, vychádzajúca z x. Topológiu na TM indukujeme atlasom.

Ponechávame na čitateľa, aby si dokázal, že takto dostaneme atlas a že TM je varieta dimenzie $2n$.

6.3. Poznámky.

1. Tangenciálny fibrovaný priestor sa v angličtine nazýva "tangent bundle". Slovenský názov sa odvodzuje od ruského ("kasateľnoje rassloennoje prostranstvo").

2. Zjednotenia v (6.1) a (6.2) berieme ako *disjunktné*, t.j. $T_{x_1}M$ a $T_{x_2}M$ pre $x_1 \neq x_2$ berieme ako dva rozličné exempláre priestoru $\mathbb{R}^n$. To platí aj pre prípad variety v R^n, kde si priestory T_xM môžeme predstaviť ako pretínajúce sa lineárne podpriestory priestoru $\mathbb{R}^n$ (2.1, 2.4).

3. Z definície (6.2), (6.3) vyplýva, že ak (U, φ) je mapa, potom $TU = \underset{x \in U}{U} T_xM$ je izomorfné $U \times \mathbb{R}^n$, kde $n = \dim M$. Vo všeobecnosti však TM nie je izomorfné $M \times \mathbb{R}^n$!

6.4. Vektorové pole a jeho integrálne krivky. Nech je C^{r+1}-varieta, $r \geq 1$. Kánonickú projekciou $\pi : TM \to M$ definujeme predpisom

$$\pi(\delta x) = x \quad \text{ak } \delta x \in T_xM.$$

C^r*- vektorovým poľom* nazveme C^r-zobrazenie $X : M \to TM$ také, že $\pi \circ X$ je identita.

Nech $I \subset \mathbb{R}$ je otvorený interval a $\gamma : I \to M$ je C^r-zobrazenie.

Zobrazenie γ nazveme *integrálnou krivkou* vektorového poľa X, ak pre všetky $t \in I$ platí

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)). \tag{6.4}$$

Inak povedané, $X(\gamma(t))$ je dotykovým vektorom ku krivke γ v bode $\gamma(t)$.

Čo značí (6.3) v lokálnych súradniciach ? Nech (U, φ) je mapa, $\gamma(t_0) \in U$, $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ sú súradnice v $\mathbb{R}^n \supset \varphi(U)$ a nech

$$X_1(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \cdots + X_n(\xi)\frac{\partial}{\partial \xi_n}$$

je súradnicová reprezentácia vektora $X(x)$ pre $\xi = \varphi(x)$. Podľa predpokladu sú funkcie $X_j(\xi)$ C^r-funkciami bodu ξ.

Rovnosť (6.4) môžeme v zmysle (6.3) prepísať do ekvivalentnej rovnosti

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(t) = X_1(\varphi \circ \gamma(t))\frac{\partial}{\partial \xi_1} + \cdots + X_n(\varphi \circ \gamma(t))\frac{\partial}{\partial \xi_n},$$

alebo rozpísané do zložiek

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)_1(t) = X_i((\varphi \circ \gamma)(t)). \tag{6.5}$$

Krivka $\gamma(t)$ je teda integrálnou krivkou vektorového poľa X práve vtedy, ak jej lokálna súradnicová reprezentácia $(\varphi \circ \gamma)(t)$ je riešením systému diferenciálnych rovníc (6.5). Ako dôsledok základných viet o riešení diferenciálnych rovníc dostávame nasledovnú vetu:

Veta. *Každým bodom M prechádza jediná integrálna krivka vektorového poľa X a jej hodnota v ľubovoľnom čase t je C^r-funkciou bodu, cez ktorý prechádza.*

Touto vetou vlastne dávame zmysel diferenciálnym rovniciam z 1.1 na $\mathbb{S}$, 1.2 na $\mathbb{T}^2$, pohybovým rovniciam tuhého telesa (ktoré sme neuviedli). Ďalej nám veta umožňuje redukovať dimenziu diferenciálnej rovnice na invariantné variety nižšej dimenzie, ako sú napr. hladiny energie v 1.5.

6.7. Diferenciál diferencovateľného zobrazenia. Nech M je C^r-varieta a $f \in C^r(M, \mathbb{R})$. Diferenciálom zobrazenia f v bode $x \in M$ rozumieme zobrazenie

$$Df(x) : T_x M \to \mathbb{R},$$

definované vzťahom

$$Df(x)\delta x = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) \tag{6.6}$$

ak $\delta x \in \dot{\gamma}(0)$. Ak (U, φ) je mapa cez bod x, (6.6) a súradnicová reprezentácia δx je

$$\delta\xi_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}, + \ldots \delta\xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_n},$$

potom (6.6) je ekvivalentné vzťahu

$$D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) = D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\delta\xi,$$

kde $\delta\xi = (\delta\xi_1, \ldots, \delta\xi_n)$.

Nech N je C^r-varieta. Analogicky (6.6) (s využitím mapy na N, obsahujúcej $f(x)$) sa definuje diferenciál $Df(x) : T_x M \to T_{f(x)} N$ zobrazenia $f \in C^r(M, N)$. Definíciu ponechávame ako cvičenie.

Ak $F \in C^r(M, N)$ definujeme zobrazenie $TF : TM \to TN$ predpisom

$$TF(\delta x) = DF(x)\delta x \quad \text{ ak } \pi(\delta x) = x.$$

6.8. Cvičenia.

1. Dokážte podrobne, že $\dim T_x M = \dim M$, $\dim TM = 2 \dim M$.

2. Prečo je TM varieta C^{r-1}, ak M je C^r?

3. Dokážte, že množina máp na TM z 6.1 tvorí atlas.

4. Nech (U, φ) (V, ψ) sú 2 mapy na M také, že $x \in U \cap V$. Dokážte, že ak $\delta\xi = (\delta\xi_1, \ldots, \delta\xi_n)$, $\delta\eta = (\delta\eta_1, \ldots, \delta\eta_i)$ sú súradnice vektora $\delta x \in TxM$ v mapách (U, φ) resp. (V, ψ), potom

$$\delta\eta = D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))\delta\xi.$$

5. Definujte diferenciál zobrazenia pomocou lokálnych máp.

6. Dokážte, že ak M, N, P sú diferencovateľné variety a : $F : M \to N$, $G : N \to P$ sú diferencovateľné zobrazenia, potom aj $G \circ F$ je diferencovateľné a platí

$$D(G \circ F)(x) = DG(F(x))DG(x).$$

7. Dokážte, že $T\mathbb{S}^2 \neq S^2 \times \mathbb{R}^2$. [Návod: každé vektorové pole na $\mathbb{S}^2$ musí mať nulu].

8. Dokážte, že ak M je kompaktná varieta, potom intervalom existencie každej integrálnej čiary ľubovoľného vektorového poľa na M je $\mathbb{R}$.

7. Kotangenciálny priestor a kotangenciálny fibrovaný priestor

7.1. Kotangenciálny priestor.

Nech M je C^r-varieta, $x \in M$. Kotangenciálnym priestorom k M v bode x nazývame priestor lineárnych funkcií na T_xM. Označujeme ho T_x^*M.

7.2. Poznámka. Hoci kotangenciálny priestor je lineárnym priestorom rovnakej dimenzie ako T_xM robíme medzi nimi rozdiel. Dôvodom je, že vektory z T_xM resp. T_x^*M sa odlišne transformujú pri zámene súradníc (Cvičenie 7.5.1, Kapitola 8).

7.3.. Analogicky ako v prípade tangenciálneho priestoru môžeme aj kotangenc-i-álny priestor dostať ako množinu tried ekvivalencie, pričom úlohu kriviek preberú funkcie.

Veta. *T_x^*M je izomorfný (lineárnemu priestoru) tried ekvivalencie $\cong$ priestoru $C^r(M, \mathbb{R})$, definovaného predpisom*

$$f \cong g \quad ak\; D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) = D(g \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \tag{7.1}$$

kde (U, φ) je mapa taká, že $x \in U$. Izomorfizmus je určený vzťahom

$$X^*(\delta x) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0), \tag{7.2}$$

kde $\delta x = \dot{\gamma}(0)$ a $X^* = [f]$ je triedou ekvivalencie funkcie f.

Dôkaz. Ponechávame ako cvičenie overiť, že ekvivalencia (7.1) nezávisí od voľby mapy.

Pretože

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) = D(f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)'(0),$$

vzťah (7.2) definuje zobrazenia na triedach ekvivalencie; overenie jeho linearity a injektívnosti ponechávame ako cvičenie (7.6.3).

Dokážeme surjektívnosť, t.j. že ku každému $X^* \in T_{x_0}^*M$ existuje $f \in C^r(M, \mathbb{R})$ také, že v mape (U, φ), $x \in U$ platí

$$X^*(\delta x) = D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \gamma)'(0) \tag{7.3}$$

ak $\gamma(0) = x_0,\ \dot{\gamma}(0) = \delta x$.

Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme $\varphi(x_0) = 0$, označme $\xi_1, \ldots, \xi_n$ súradnice v $\varphi(0)$ a δx_i, $i = 1, \ldots, n$ zložky vektoru δx v jeho súradnicovej reprezentácii,

$$\delta x = \delta x_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \cdots + \delta x_n \frac{\partial}{\partial \xi_n}.$$

Označme $a_i = X^*(\frac{\partial}{\partial \xi_i})$, $i = 1, \ldots, n$. Potom platí

$$X^*(\delta x) = a_1 \delta x_1 + \cdots + a_n \delta x_n.$$

Pre $x \in U$ definujeme

$$f(x) = a^T \varphi(x) = a_1 \varphi_1(x) + \cdots + a_n \varphi_n(x);$$

funkciu f rozšírime na celú varietu M ako v 3.4.

Ak $\gamma(0) = x_0$, $\dot{\gamma}(0) = \delta x$, platí

$$\frac{d}{dt} - D(f \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \gamma)'(0) = a^T(\varphi \circ \gamma)'(0) = a_1 \delta x_1 + \cdots + a_n \delta x_n = X^*(\delta x).$$

$\square$

7.4. Súradnicová reprezentácia vektorov z T_x^*M. Môžeme ju vytvoriť analogicky ako pre T_xM. Nech (U,φ) je mapa obsahujúca x_0, $\varphi(x_0)=0$, nech $e_1,\dots,e_n$ je báza v $\mathbb{R}^n \supset \varphi(U)$ a $\xi_1 e_1+\dots+\xi_n e_n$ je rozklad vektora ξ v tejto báze. V $T_{x_0}^*M$ definujeme vektory

$$d\xi_i = [\varphi_i]$$

(= trieda ekvivalencie funkcie, priraďujúcej bodu x i-tú zložku $\varphi(x)$).

Nechávame ako cvičenie overiť, že vektory $d\xi_i$ tvoria bázu v T_x^*M. Ak $df(x_0)$ označíme vektor - triedu ekvivalencie funkcie f, môžeme teda písať

$$df(x_0) = a_1 d\xi_1 + \dots + a_n d\xi_n \tag{7.4}$$

pre vhodné koeficienty $a_1,\dots,a_n$. Ponechávame ako cvičenie overiť si, že platí

$$a_i = \frac{d}{dt}(f\circ\varphi^{-1})(te_i)|_{t=0},$$

je teda logické označiť $a_i = \frac{\partial f}{\partial \xi_i}$. Formula (7.4) tým dostáva formu analogickú ako v lineárnych priestoroch,

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \xi_i} d\xi_i.$$

7.5. Kotangenciálny fibrovaný priestor. Kotangenciálny fibrovaný priestor T^*M k C^r-variete sa definuje ako disjunktné zjednotenie priestorov T_x^*M, C^{r-1}-atlas a topológia na T^*M sa vytvárajú pomocou atlasu na M analogicky, ako sa vytvára atlas a topológia na TM. Detaily ponechávame ako cvičenie (7.6.4).

7.6. Cvičenia.

1. Dokážte, že ak $(U,\varphi),(\tilde U,\tilde\varphi)$ sú dve mapy také, že $x\in U\cap\tilde U$ a $X^*,\tilde X^*$ sú reprezentácie toho istého vektora z T_x^*M v súradniciach φ resp. $\tilde\varphi$, platí

$$X^* = \left[D(\psi\circ\varphi^{-1})(\varphi(x))\right]^T \tilde X^*$$

.

2. Overte, že ekvivalencia (7.1) je nezávislá od voľby mapy.
3. Dokážte linearitu a injektivitu zobrazenia, daného vzťahom (7.3).
4. vytvorte atlas na T^*M.
   [Návod: postupujte analogicky ako pri konštrukcii atlasu na TM.]

8. Vektorový fibrovaný priestor

8.1. Tangenciálny a kotangenciálny fibrovaný priestor majú čosi spoločného: sú disjunktným zjednotením množiny lineárnych priestorov, parametrizovaných bodmi variety. Takáto štruktúra sa zavádza abstraktne a nazýva sa *vektorový fibrovaný priestor* (VFP, vector bandle).

Nech M je C^r-varieta s atlasom $\mathcal{A}$. C^r-vektorovým fibrovaným priestorom nad M s fíbrom $V=\mathbb{R}^p$ nazývame C^r-diferencovateľnú varietu

$$E = \bigcup_{x\in M} V_x,$$

(disjunktné zjednotenie), kde V_x sú izomorfnými kópiami V. Atlas na E pozostáva z dvojíc $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$, kde

$$\tilde{U} = \bigcup_{x \in U} V_x,$$

množiny U tvoria pokrytie M podmnožinami atlasu $\mathcal{A}$, $\tilde{\varphi} : \bigcup_{x \in U} V_x \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^p$ je také, že $\tilde{\varphi}|_{V_x} : V_x \to \mathbb{R}^p$ je lineárny izomorfizmus,

$$\pi_1 \circ \tilde{\varphi} = \varphi \circ \pi,$$

kde $\pi(V_x) = x$ je prirodzená projekcia (6.4), π_1 je prirodzená projekcia kartézskeho súčinu na prvú zložku a φ je súradnicové zobrazenie mapy z $\mathcal{A}$, obsahujúcej U.

8.2. Rez. C^r-*rezom* VFB E nad M nazývame C^r zobrazenie $\rho : M \to E$ také, že $\pi_\circ \rho$ je identita. Príkladom rezu je vektorové pole (6.4).

8.3. Poznámky.

1. Tangenciálny a kotangenciálny fibrovaný priestor súvislej variety sú VFP so špecificky definovanými zobrazeniami $\tilde{\varphi}$ a atlasom, pre mapy $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ ktorých platí $\pi(U) \in \mathcal{A}$. Ďalšie konkrétne modely abstraktného VFP sa objavia v nasledujúcej kapitole.

2. Hoci $E \cap \pi^{-1}(U)$ je izomorfný $\varphi(U) \times V$ (a teda E je *lokálne triviálny*), nemusí platiť, že E je globálne izomorfný kartézskemu súčinu otvorenej podmnožiny $\mathbb{R}^n$ s $\mathbb{R}^p$. Ak je to pravda, hovoríme, že E je *triviálny*.

3. Definícia VFP sa obvykle uvádza v inej forme. V definícii 8.1 sme sa snažili čo najviac ju prispôsobiť konkrétnym prípadom VFP - tangenciálnemu, kotangenciálnemu a priestorom, ktoré sa budú vyskytovať v ďalších kapitolách.

8.4. Cvičenia.

1. Konkretizujte pojmy definície 8.1 VFP pre prípady tangenciálneho a kotangenciálneho FP.
2. Tangenciálny a kotangenciálny FP sú iba C^{r-1}, hoci varieta sama je C^r. Ako to ide dokopy s definíciou 8.1 ?
3. Overte, že mapy na VFP sú kompatibilné.
4. Overte, že TM a T^*M sú VFP.

9. Tenzory a tenzorové polia

9.1. Upratovanie. Nelineárny charakter diferenciálnych variet si vynucuje používanie rozličných lokálnych súradníc a prechody medzi nimi. Paradoxne umožňuje lepšie si uvedomiť význam niektorých základných pojmov z lineárnej teórie, ktoré by sa inak mohli javiť ako zbytočné jemnosti. Zopakujme si ich.

Nech V^n je *n-rozmerný lineárny priestor*, t.j. lineárny priestor, ktorý má práve n lineárne nezávislých vektorov. Výberom *bázy* vo V^n, t.j. n-tice lineárne nezávislých vektorov $e_1, \ldots, e_n$ urobíme V^n lineárne izomorfným priestoru $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n-\text{krát}}$ predpisom

$$x \mapsto (x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{ak } x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Voľba bázy nám súčasne umožní vybaviť V^n Euklidovskou štruktúrou, t.j. skálarnym súčinom. Definuje sa ako bilineárna funkcia $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^n \times V^n \to \mathbb{R}$ spĺňajúca

$$\langle e_i, e_j \rangle = a_{ij}.$$

V terminológii diferencovateľných variet môžeme voľbu bázy chápať ako voľbu *globálnej mapy* na V^n.

Každú lineárnu funkciu l na V^n (ich množinu označujeme V^{n*}) môžeme pri danom výbere bázy reprezentovať skalárnym násobením vektoru z V^n pevným vektorom,

$$l(x) = \langle v, x \rangle. \tag{9.1}$$

Priestor lineárnych funkcií na V^n je teda opäť izomorfný priestoru $\mathbb{R}^n$ a jeho vektory sa nazývajú *kovektormi.* Pri zámene bázy vo V^n sa však reprezentácia kovektorov transformuje inak než vektorov z V^n (Cvičenie 9.8.2)

Lineárny operátor $A : V^m \to V^n$ môžeme chápať ako bilineárne zobrazenie

$$\tilde{A}(x, l) = l(Ax), \tag{9.2}$$

pri daných bázach vo V^m a V^n reprezentovaného maticou $m \times n$.

Vyššie uvedené pojmy z lineárnych priestorov môžeme prirodzene zaviesť do fíbrov VFB. Pretože v netriviálnych varietach sa nemôžeme vyhnúť viacerým bázam na tom istom fíbri, vypuklo sa objavuje potreba vedieť, ako sa súradnicové reprezentácie spomínaných objektov (vektorov, kovektorov a multilineárnych zobrazení na nich) transformjú pri zámene súradníc.

Osobitnú úlohu hrajú tangenciálne priestory T_xM a ich duály - kotangenciálne priestory T_x^*M. V zmysle (9.2) môžeme napríklad diferenciál $DF(x)$ zobrazenia $F : M \to N$ chápať ako bilineárnu funkciu z $T_xM \times T_x^*N$; dôležitú úlohu hrá aj skalárny súčin na T_x^*M, ktorý môžeme chápať ako bilineárnu funkciu $T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$.

9.2. Tenzory. V predchádzajúcom odseku sme naznačili potrebu zaoberať sa multilineárnymi funkciami na lineárnych priestoroch a ich duáloch. Nech V je konečnorozmerný vektorový priestor. *Tenzorom* (k-krát kontravariantným a l-krát kovariantným, alebo (k,l) - tenzorom) nazývame multilineárnu funkciu

$$T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{l \text{ krát}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{k \text{ krát}} \to \mathbb{R}.$$

Tenzorovým súčinom $T \otimes T'$ (k,l)-tenzora T a (k',l')-tenzora T' nazývame $(k+k', l+l')$-tenzor, definovaný predpisom

$$\begin{aligned} T \otimes T'(v_1, \dots, v_l, w_1, ..., w_{l'}, v^1, \dots, v^k, w^1, \dots, w^{k'}) \\ = T(v_1, \dots, v_l, v^1, \dots, v^k) T(w_1, \dots, w_{l'}, w^1, \dots, w^{k'}) \end{aligned}$$

Ak vo V, V^* zvolíme duálne bázy $\{e_i\}_{i=1}^n$, resp. $\{e^j\}_{j=1}^n$, môžeme ich bázové vektory e_i, e^j chápať ako $(1,0)$- resp. $(0,1)$-tenzory. Vzhľadom na bilinearitu tenzora môžeme (k,l)-tenzor T jednoznačne definovať n^{l+k} číslami

$$T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_l} = T(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}, e^{j_1}, \dots, e^{j_l}).$$

Ak použijeme vo fyzike obvyklú sumačnú konvenciu, podĺa ktorej sa sumuje podĺa každého indexu, ktorý sa vo výraze vyskytuje ako horný aj dolný, platí

$$T = T^{i_1,\dots,i_k}_{j_1,\dots,j_e} e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_l} \otimes e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}. \tag{9.4}$$

Tenzor typu $(m, 0)$ alebo $(0, m)$ nazývame *symetrickým*, ak je symetrický ako multilineárna funkcia; antisymetrickým, ak jeho hodnota zmení znamienko pri nepárnych permutáciách premenných; pozitívnym, ak je $T(x, \ldots, x)$ pozitívne pre každé $x \neq 0$. Množina symetrických a antisymetrických tenzorov zrejme tvorí lineárny podpriestor priestoru tenzorov s pevným m, kým množina pozitívnych tenzorov tvorí kladný kužeľ (t.j. je uzavretá vzhľadom na lineárnu kombináciu s kladnými koeficientami).

9.3. Príklady.

1. Vektor $v \in V$ definuje lineárnu funkciu $v^* \to v^*(v)$ na V^* a preto je tenzorom typu (1,0). Z analogických príčin je kovektor tenzoru typu (0,1).

2. Skalárny súčin na V je tenzorom typu (0,2).

3. Základným pojmom mechaniky kontinua je *tenzor napätia.* Predpokadajme, že v kontinuu v $\mathbb{R}^3$ je tlak τ, pôsobiaci na plôšku veľkosti ΔS s normálovým vektorom n daný vzťahom

$$\tau = P(n)\Delta S,$$

kde $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je lineárne (obr..)

Napríklad v prípade Pascalovho zákona (tlak kvapaliny je vo všetkých smeroch rovnaký) je $P(n) = pn$, kde p je (číselná) hodnota tlaku.

Zobrazenie P, chápané ako (1,1) tenzor v zmysle (9.2) sa nazýva tenzorom napätia.

9.4. Poznámky.

1. Teórii tenzorov v zmysle 9.2 sa v inžinierskej literatúre spravidla hovorí *algebraická teória tenzorov.* Tenzory sa závadzajú pomocou ich súradnicovej reprezentácie, pričom sa definuje, ako sa ich "súradnice" menia pri ramene súradníc.

2. Zavedením konkrétneho skalárneho súčinu vo V môžeme prostredníctvom (9.1) stotožniť V^* s V a tým tenzor typu (k, l) stotožniť a tenzorom typu $(0, k+l)$. Tomuto sa hovorí "zdvih indexov". Keďže v prirodzenom geometrickom priestore $\mathbb{E}^3$ máme skalárny súčin kanonicky daný, chápu sa tenzory v inžinierskej mechanike kontinua (medzi nimi aj tenzor napätia) často od počiatku ako tenzory čisto kovariantné.

9.5. Tenzorové pole. Nech M je C^{r+1}-varieta dimenzie n. V definícii 9.1 tenzora položme $V = T_xM$, $V^* = T_x^*M$. Keďže tenzory daného typu (k, l) (prípadne jeho podpriestorov symetrických tenzorov, atď) tvoria lineárny priestor, môžeme definovať C^r-vektorový fíbrovaný priestor s týmto lineárnym priestorom ako fíbrom.

Mapy na nich vytvoríme analogicky ako v prípade tangenciálneho fibrovaného priestoru, pomocou súradníc tenzora (9.4). Rez takéhoto VFP nazývame (analogicky k vektorovému poľu) *tenzorovým poľom.*

9.6. Poznámka. Teórii tenzorových polí sa v inžinierskej literatúre často hovorí "diferenciálna teória tenzorov".

9.7. Príklad. Tenzor (resp. tenzorové pole) deformácie.

Nech Q je varieta predstavujúca mechanické kontinuum v $\mathbb{E}^3$ a $u \in C^2(Q, \mathbb{E}^3)$, kde $x + u(x)$ je bod, do ktorého sa premiestni bod x. Zaujíma nás, ako sa týmto premiestnením bodov Q *deformuje*, t.j. ako sa zmenia vzdialenosti jeho bodov.

Nech teda $x, \tilde{x} \in Q$ a l je štvorec ich vzdialenosti. Potom jeho zmena vzniknutá premiestnením je

$$\begin{aligned}\Delta l(x, \tilde{x}) &= \|x + u(x) - \tilde{x} - u(\tilde{x})\|^2 - \|x - \tilde{x}\|^2 \\ &= \langle x + u(x) - \tilde{x} - u(\tilde{x}), x + u(x) - \tilde{x} - u(\tilde{x})\rangle - \langle x - \tilde{x}, x - \tilde{x}\rangle \\ &= 2\langle \Delta x, \Delta u(x)\rangle + \langle \Delta u(x), \Delta u(x)\rangle,\end{aligned}$$

kde $\Delta x = x - \tilde{x}$, $\Delta u(x) = u(x) - u(\tilde{x})$.

Ak u je C^2 funkcia, platí

$$\begin{aligned}\Delta l(x, \tilde{x}) &= 2\langle \Delta x, Du(x)\Delta x\rangle + \langle Du(x)\Delta x, Du(x)\Delta x\rangle + O(\|\Delta x\|^3) \\ &= \eta(\Delta x, \Delta x) + O(\|\Delta x\|^3), \end{aligned} \tag{9.5}$$

kde

$$\eta(\Delta x, \Delta y) = \langle Du(x)\Delta x, \Delta y\rangle + \langle Du(x)\Delta y, \Delta x\rangle + \langle Du(x)\Delta y, Du(x)\Delta x\rangle. \tag{9.6}$$

Vezmime teraz $\tilde{x} = \gamma(t)$, kde γ je krivka v Q taká, že $\gamma(0) = 0$, $\dot{\gamma}(0) = \delta x$.

Potom z (9.5) dostávame

$$\lim_{t \to 0} t^{-2} \Delta l(x, \gamma(t)) = \eta(\delta x, \delta x). \tag{9.7}$$

Bilineárne zobrazenie $\eta : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ v (9.6) sa nazýva *tenzorom deformácie*. Je to tenzor typu (0,2).

V inžinierskej mechanike kontínua sa zavádza aj *tenzor malých deformácii* za predpokladu, že $Du(x)$ je malé a to tak, že v definícii η v (9.5) sa zanedbá $\langle Du(x)\Delta y, Du(x)\Delta x\rangle$, ktorý je v $Du(x)$ druhého stupňa.

Podľa Hookovho zákona je tenzor deformácie lineárnou funkciou tenzoru napätia, teda

$$\eta = U(\tau).$$

V zmysle (9.2) je U tenzor typu (3,1) a ako taký má $3^4 = 81$ súradníc. V prípade symetrií (ako je napríklad izotropnosť prostredia) sa počet súradníc znižuje.

9.8. Cvičenia.

1. Definujte skalárny súčin na V^n axiomaticky a ukážte, že pri zvolenej báze možno všetky skalárne súčiny stotožniť so symetrickými pozitívne definitnými maticami.

2. Ako sa zmenia zložky vektoru $x \in V^n$ a zložky kovektoru v z (9.1) pri zmene bázy vo V^n?

3. Ak $A : X \to Y$ je lineárne zobrazenie a X aj Y sú izomorfné V^n, maticová reprezentácia zobrazenia A sa pri zmene bázy v X (alebo Y) zmení rozlične podľa toho, či považujeme X a Y za ten istý priestor alebo nie. Ako?

4. Overte formulu (9.4) pre tenzory typu $(2,0)$, $(1,1)$ a $(0,2)$.

5. Overte, že priestor zobrazení $V^m \to V^{n*}$ je izomorfný priestoru bilineárnych foriem $V^m \times V^{n*} \to \mathbb{R}$.

10. Riemannova metrika a geodetické čiary

10.1. Vzdialenosti na variete. Doteraz rozvinutá teória diferencovateľných variet nám neumožňuje zaviesť na nich vzdialenosť. Za vzdialenosť dvoch bodov na variete v $\mathbb{E}^n$ by sme síce mohli vziať ich vzdialenosť ako bodov z $\mathbb{E}^n$, nie je to však ono. Jednak je to neprirodzené (vzdialenosť pólov na jednotkovej $\mathbb{S}^2$ v $\mathbb{E}^3$ nám skôr pripadá byť π než 2), jednak nám to nič nehovorí o vzdialenosti bodov na abstraktných varietach. Prirodzenou myšlienkou je postupovať tak ako pri zavádzaní diferencovatweľnej štruktúry: indukovať na lokálnej mape euklidovskú štruktúru pomocou súradnicového zobrazenia. Niet však nijakého dôvodu, aby euklidovské štruktúry, indukované rozličnými mapami boli rovnaké.

Cestou, ktorá vedie k cieľu je vziať za východisko vzdialenosť dvoch bodov ako dĺžku ich najkratšej spojnice. Pripomenieme si, že ak $\gamma : [0,1] \to \mathbb{E}^n$ je diferencovateľná krivka, potom jej dĺžka $S(\gamma)$ sa definuje ako limita dĺžok polygónov z úsečiek, spájajúcich jej body $\gamma(t_i)$, ak vzdialenosti bodov t_i idú k nule.

Presnejšie, ak $\{t_i\}_{i=0}^N$ je delenie intervalu $[0,1]$, $t_0 = 0$, $t_N = 1$ a $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, potom

$$S(\gamma) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=0}^{N-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\sum_i \|\dot\gamma(t_i)\Delta t\| + o(\Delta t) \right] =$$
$$= \int_0^1 \|\dot\gamma(t)\| dt = \int_0^1 \langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t) \rangle^{1/2} dt. \tag{10.1}$$

Dĺžku krivky podĺa (10.1) možno definovať aj na veriete M - ak euklidovský skalárny súčin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nahradíme pozitívnou symetrickou bilineárnou funkciou na $T_{\gamma(t)}M$, teda tenzorom typu (0,2). Táto úvaha motivuje nasledovnú definíciu:

10.2 Definícia. Nech M je C^r-varieta, $r > 2$. *Riemannovou metrikou* nazývame C^r-pole pozitívnych symetrických bilineárnych tenzorov typu (0,2).

Ak $\gamma : [0,1] \to M$ je C^r-krivka v M a R je Riemannova metrika, potom *dĺžkou* $S(\gamma)$ *krivky* γ rozumieme hodnotu

$$S(\gamma) = \int_0^1 R(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))^{1/2} dt. \tag{10.2}$$

Poznamenajme, že to, že R je $(0,2)$ tenzorové pole značí, že $\mathbb{R} : TM \times TM \to \mathbb{R}$ je bilineárna na T_xM pre pevné x.

10.3. Existencia Riemannovej metriky. Možno vôbec na každej variete zaviesť Riemannovu metriku?

Lokálne možno Riemannovu metriku na varietu preniesť pomocou zobrazenia mapy z euklidovskej štruktúry na priestore obrazov. Presnejšie, nech M je n-rozmerná varieta (U, φ) mapa a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalárny súčin na $\mathbb{E}^n \supset \varphi(U)$. Pre $x \in U$ definujeme $R(\delta x, \delta x) = \langle \widetilde{\delta x}, \widetilde{\delta x} \rangle$, kde $\widetilde{\delta x}$ sú súradnicové reprezentácie vektorov δx v súradniciach (6.1).

Množinami s takto zavedenými Riemannovými metrikami môžeme síce pokryť M, na prekryvoch súradnicových okolí však dostaneme viacero metrík, ktoré sa nemusia zhodovať.

Existuje však konštrukcia, často používaná v teórii diferencovateľných variet, ktorá umožní modifikáciou takto definovaných lokálnych metrík vytvoriť globálnu Riemannovu metriku.

10.4. Veta o rozklade jednotky. *Nech M je diferencovateľná varieta, $X \subset M$ jej podmnožina, $x_0 \in X$ a nech $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ je pokrytie X relatívne otvorenými množinami. Potom existuje postupnosť hladkých funkcií $\{\Theta_i\}_i$, nazývaných rozklad jednotky podriadený pokrytiu $\mathcal{U}$ taká, že*

(a) $0 \le \Theta_i(x) \le 1$

(b) supp $\Theta_i (= \{x : \Theta_i(x) \neq 0\})$ *je podmnožinou niektorej z množín U_α pre každé i a predstavuje lokálne konečné pokrytie X.*

(c) $\sum_i \Theta_i(x) = 1$.

(d) existuje i_0 také, že $x_0 \in$ supp $\Theta_{i_0} \setminus \bigcup_{i \neq i_0}$ supp Θ_i.

Dôkaz. Označíme $U_\alpha = X \cap W_\alpha$, kde $(W_\alpha, \varphi_\alpha)$ je mapa na M, $W = \bigcup_\alpha W_\alpha$, $\{K_j\}_{j=0}^\infty$ rastúcu postupnosť kompaktných množín takých, že $x_0 \in K_0$ a $\bigcup K_j = W$.

Množiny $\varphi_\alpha^{-1}(G)$, kde G sú otvorené gule v $\varphi_\alpha(W_\alpha)$, $\alpha = \alpha(j)$, pokrývajú W. Z gúľ vyberieme konečný počet $G_1, \dots, G_r$ tak, že $\varphi_\alpha^{-1}(G_j)$ pokrývajú K_2 a $x_0 \in \varphi_\alpha^{-1}(G_0) \setminus \bigcup_{i>0} \varphi_\alpha^{-1}(G_i)$.

Na každej z takto vybratých gúľ vezmeme "hrboľovú funkciu" (**3.4**) η_i tak, aby množiny $E_i = \{x : \eta_i \circ \varphi_\alpha(x) \equiv 1$ v okolí $x\}$ pokryli K_2 a aby platilo $x_0 \in E_0 \setminus \bigcup_{i>0} E_i$. Predpokladajme, že sme už takto pokryli K_{j-1} pre nejaké $j > 2$. Rovnakým spôsobom (s výnimkou požiadaviek na η_0) nájdeme konečný počet gúľ a takých hrboľových funkcií na nich, aby nosiče ich φ_α^{-1}-obrazov pokryli $K_j \setminus K_{j-1}$, ale aby pritom nepretínali $W \cap K_{j-2}$. Ako výsledok dostaneme postupnosť hrboľových funkcií $\{\eta_i\}$ takých, že E_i vytvárajú lokálne konečné pokrytia W. Pre $x \in W$ definujeme

$$\Theta_i(x) = \frac{\eta_i(x)}{\sum_i \eta_i(x)}.$$

Keďže pre každé x je aspoň jeden zo sčítancov v menovateli, ale najviac konečný počet z nich nenulových, je Θ_i dobre definované a diferencovateľné. Overenie toho, že Θ_i spĺňajú vlastnosti (a)-(c), ponechávame na čitateľa cvičenie (10.16.1).

10.5. Veta. *Nech M je C^r-varieta $x_0 \in M$ a nech R_0 je Riemannova matrika na okolí bodu x_0. Potom existuje Riemannova metrika R na M rovná R_0 na nejakom okolí x_0.*

Dôkaz. Zvolíme ľubovoľné Riemannove metriky na R_α otvorených množinách $\{U_\alpha\}_\alpha$ tvoriacich pokrytie M, pričom U_0 je okolie x_0 a metrika na nej je R. Zostrojíme rozklad jednotky $\{\Theta, \cdot\}, \cdot$ podľa 10.4, podriadený pokrytiu $\{U_\alpha\}$ a položíme

$$R = \sum_i \Theta_i(x) R_i(x).$$

Ponechávame na čitateľa, aby si overil, že R spĺňa požiadavky vety (Cvičenie 10.16.2).

10.6. Poznámky.

1. Existencia Riemannovej metriky na ľubovoľnej variete vyplýva aj z Whitneyovej vety o vnorení. Táto cesta však nedáva možnosť sčasti metriku predpísať, ako v 10.5.

2. Všimnime si, že aj v $\mathbb{R}^n$ je možné okrem metrík priestorovo homogénneho skalárneho súčinu generovaného bázami ako v 9.1 zaviesť iné priestorovo nehomogénne metriky. Nie je to vôbec umelé: vo fyzike je bežné, že okrem "geometrickej vzdialenosti" v euklidovskom priestore meriame vzdialenosť v nehomogénnom prostredí aj rýchlosťou, ktorou ju vzruch toho-ktorého typu (svetlo, zvuk, ale aj povedzme chôdza) prekoná. (Viac o tom v Kapitole 11).

10.7. Geodetické čiary - definícia. Nech M je C^r-Riemannova varieta. V súlade s 10.1. definujeme vzdialenosť dvoch bodov na variete ako infimum dĺžok, $S(\gamma)$ kriviek γ, ktoré tieto dva body spájajú. Ponechávame ako vcičenie, aby si čitateľ overil, že ak je M súvislá, toto infimum je vždy konečné a že takto definovaná vzdialenosť spĺňa axiómy metriky.

Budeme sa však zaujímať o to, či existuje krivka, ktorá má túto minimálnu dĺžku (ako je priamka pre Euklidovskú metriku) a čo to za krivku je.

Je zrejmé, že každý úsek takejto krivky musí byť najkratšou krivkou, spájajúcou jeho koncové body (Cvičenie 10.3). Preto, ak nám ide o lokálne vlastnosti takejto krivky, môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokadať, že je najkratšou spojnicou bodov v jednej mape. Súradnicovým zobrazením môžeme celú krivku aj s metrikou preniesť do $\mathbb{R}^n$ (samozrejme, metrika môže byť priestorovo nehomogénna). Po takejto redukcii ide o nasledovnú úlohu:

Daná je Riemannova metrika $R : U \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a body $p, q \in U$. Predpokladajme, že $\hat{\gamma} : [0, 1]$ je C^r-krivka taká, že $\hat{\gamma}(0) = p$, $\hat{\gamma}(1) = q$ a $S(\hat{\gamma})$ je minimálne spomedzi všetkých kriviek s takýmito vlastnosťami. Inak povedané,

$$\int_0^1 \left[R(\hat{\gamma}(t))\dot{\hat{\gamma}}^2(t)\right]^{1/2} dt \leq \int_0^1 \left[R(\gamma(t))\dot{\gamma}^2(t)\right]^{1/2} dt \tag{10.3}$$

pre každú C^r-krivku spĺňajúcu $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. ($R(x, \delta x, \delta y)$ je pre pevné x bilneárna funkcia vektorov $\delta x, \delta y$, preto v súlade s konvenciou v I.2.4.6 píšeme $R(x, \delta x, \delta x) = R(x)(\delta x)^2$).

Označme $V(\gamma, \dot{\gamma}) = R(\gamma)\dot{\gamma}^2$. Úloha hľadania funkcie $\hat{\gamma}$, spĺňajúcej (10.3) je úlohou variačného počtu. Jeho základným výsledkom je, že ak $\hat{\gamma}$ spĺňa (10.3) a $\dot{\hat{\gamma}}(t) \neq 0$, potom je riešením Eulerovej rovnice

$$D_\gamma(V^{1/2}(\hat{\gamma}(t), \dot{\hat{\gamma}}(t)) - \frac{d}{dt} D_{\dot{\gamma}}(V^{1/2}(\gamma(t), \dot{\hat{\gamma}}(t))) = 0. \tag{10.4}$$

Extremály tejto variačnej úlohy, t.j. trajektórie riešení Eulerovej rovnice (10.4) nazývame *geodetickými čiarami.*[1]

10.8. Reparametrizácia geodetických čiar. Rovnica (10.4) nie je veľmi prehľadná. Ukážeme, že zámenou premennej môžeme geodetické čiary dostať ako riešenia oveľa jednoduchšej rovnice.

Čiastočným dosadením za V do rovnice (10.4), rozpisom do zložiek a vykonaním derivovania zloženej funkcie dostaneme

$$V^{-1/2} \sum_{\mu,\nu} D_{\gamma_i} r_{\mu\nu} \dot{\gamma}_\mu \dot{\gamma}_\nu - 2\frac{d}{dt}(V^{-1/2} \sum_j r_{ij}\dot{\gamma}_j) = 0, \tag{10.5}$$

[1]Kee Eulerova rovnica ako rovnica 2. rdu je vlastne rovnicou na TM, presnejie by sme mali miesto trajektrie rieenia hovori o prirodzenej projekcii trajektrie rieenia na M.

kde r_{ij} sú prvky symetrickej kladne definitnej matice, reprezentujúcej tenzor R (argument γ vynechávame). Zámenou premennej $dt = V^{-1/2} ds$ v (10.5) dostaneme

$$V^{1/2} \sum_{\mu,\nu} D_{\gamma_i} r_{\mu\nu} \frac{d\gamma_\mu}{ds} \frac{d\gamma_\nu}{ds} - 2V^{1/2} \frac{d}{ds} (\sum_j r_{ij} \frac{d\gamma_j}{ds}) = 0.$$

Vykrátením $V^{1/2}$ a rozderivovaním zátvorky v druhom člene dostaneme

$$\sum_{\mu,\nu} D_{\gamma_i} r_{\mu\nu} \frac{d\gamma_\mu}{ds} \frac{d\gamma_\nu}{ds} - 2 \sum_{\mu,\nu} D_{\gamma_\mu} r_{i\mu} \frac{d\gamma_\mu}{ds} \frac{d\gamma_\nu}{ds} + \sum_j r_{ij} \frac{d^2\gamma_j}{ds^2} = 0. \tag{10.6}$$

Keďže matica (r_{ij}) je kladne definitná a teda regulárna, má inverznú, ktorej prvky označíme ρ_{ij}. Vzhľadom na symetriu matice (r_{ij}) môžeme potom rovnicu (10.6) prepísať do tvaru

$$\ddot{\gamma}_i = \sum_{\mu,\nu} \Gamma^i_{\mu,\nu} \dot{\gamma}_\mu \dot{\gamma}_\nu,$$

kde

$$\Gamma^i_{\mu,\nu} = \frac{1}{2} \sum_j \rho_{ij} [D_{\gamma_\mu} r_{j\mu} + D_{\gamma_\nu} r_{\nu j} - D_{\gamma_j} r_{\mu\nu}] \tag{10.7}$$

sa nazývajú *Christoffelovými symbolmi.* Rovnicu (10.7) vektorove zapíšeme do tvaru

$$\ddot{\gamma} = U(\gamma)\dot{\gamma}^2, \tag{10.8}$$

kde $U(\gamma) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ je bilineárne zobrazenie, ktorého i-tá zložka je daná vzťahom

$$[U(\gamma)\delta\gamma\delta\gamma']_i = \sum_{\mu,\nu} \Gamma^i_{\mu,\nu} \delta\gamma_\mu \delta\gamma'_\nu.$$

Rovnica (10.8) je rovnicou druhého rádu. Zo základnej vety o diferenciálnych rovniciach dostávame nasledovnú vetu

Veta. *Pre ľubovoľnú dvojicu $p \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$ existuje jediné riešenie rovnice (10.8) prechádzajúce bodom p a dotýkajúce sa v ňom vektora v(t. j. spĺňajúce $\gamma(0) = p$, $\frac{d\gamma}{ds}(0) = v$).*

10.9. Poznámky.

1. Všimnime si, že (10.8) je Eulerovou rovnicou pre funkcionál

$$\int V ds = \int R(\gamma)\dot{\gamma}^2 ds,$$

ktorý sa nazýva *akciou.* Výsledok z 10.8. možno teda povedať aj tak, že extremály funkcionálu dĺžky sú súčasne extremálami akcie. Táto skutočnosť má veľký koncepčný význam vo fyzike a nazýva sa Fermatov princíp. Jeho dôsledkom je napríklad to, že svetlo sa z bodu p do bodu q pohybuje po extremále rýchlosti svojho pohybu.

2. Ďalej si všimnime, že po reparametrizácii z 10.8. je geodetická čiara parametrizovaná svojou dĺžkou. Inak povedané, ak premennú interpretujeme ako čas, potom sa bod po geodetickej čiare pohybuje rovnomerne, a to rýchlosťou 1.

3. Hoci $U(\gamma)$ je bilineárnou funkciou na $t_xM \times T_xM$, jej zložky nie sú tenzormi. Sú totiž viazané na voľbu súradnicového systému euklidovskej štruktúry a pri jeho zámene sa netransformujú ako tenzory.

10.10 Spájanie bodov geodetickými čiarami. Riemannova metrika generovaná prirodzeným skalárnym súčinom má tú vlastnosť, že každýmu dvoma rozličnými bodmi prechádza jediná geodetická čiara. Je zrejmé, že táto vlastnosť globálne v ľubovoľnej Riemannovej variete neplatí. Napríklad na guli $\mathbb{S}^2$ prechádza dvoma protiľahlými bodmi nekonečne mnoho geodetických čiar - hlavných kružníc. Dokážeme však, že platí

Veta. *Nech M je Riemannova varieta. Potom ku každému bodu $p \in M$ existuje jeho okolie $V \subset U$ také, že ku každým dvom bodom $p, q \in V$ existuje jediná geodetická čiara v U, spájajúca p a q.*

Prvým krokom k dôkazu je

10.11. Lema. Ku každému bodu p Riemannovej variety M existuje také okolie U bodu p a také číslo $\epsilon > 0$, že ku každému tangenciálnemu vektoru $v \in T_pM$, spĺňajúcemu $\|v\| < \epsilon$ existuje jediné riešenie $\gamma_v : (-2, 2) \to M$ rovnice (10.8) také, že

$$\gamma_v(0) = p, \ \dot{\gamma}_v(0) = v;$$

$\gamma_v(t)$ je C^{r-1} funkcia p, v, t a platí $\gamma_{cv}(t) = \gamma_v(ct)$.

Dôkaz. Zo základnej vety o diferenciálnych rovniciach vyplýva, že pre každé $v \in T_pM$, $\|v\| \leq 2$ existuje $\epsilon_v > 0$ také, že $\gamma_{\tilde{v}}(t)$ existuje na $(-\epsilon_v, \epsilon_v)$ pre $\tilde{v}$ z nejakého okolia v. Pretože guľa $\|v\| \leq 2$ v T_pM je kompaktná, možno z týchto okolí vybrať jej konečné pokrytie. Z toho vyplýva, že existuje $\epsilon > 0$ také, že všetky riešenia γ_v s $\|v\| \leq 2$ existujú na intervale $(-\epsilon, \epsilon)$. Všimnime si, že ak $\gamma(t)$ je riešením rovnice (10.8) pre geodetické čiary, potom aj $\gamma(ct)$ je riešením pre každé $c \neq 0$. Ak $\tau = ct$, platí totiž

$$d\gamma/dt = c d\gamma/d\tau, \ d^2\gamma/dt^2 = c^2 d^2\gamma/d\tau^2,$$

a teda

$$\begin{aligned} c^2 \frac{d\gamma^2}{d\tau^2} = \frac{d^2\gamma}{dt^2} &= U(\gamma)(d\gamma/dt)^2 \\ &= U(\gamma)(d\gamma/d\tau)^2 c^2, \\ \frac{d^2\gamma}{d\tau^2} &= U(\gamma)\left(\frac{d\gamma}{d\tau}\right)^2. \end{aligned}$$

Ďalej platí $\frac{d\gamma}{d\tau}v(0) = \frac{1}{c}\frac{d\gamma}{d\tau}(v) = \frac{1}{c}v$. Ak položíme $c = 2/\epsilon$, potom ako dôsledok dostávame, že riešenia γ_v s počiatočnou podmienkou $\|v\| \leq \epsilon$ budú existovať na $(-2, 2)$. Pre $\|v\| \leq \epsilon$ totiž platí

$$\gamma_v(t) = \gamma_{2v/\varepsilon}\left(\frac{\epsilon}{2}t\right).$$

Pretože $\|2v/\varepsilon\| \leq 2$, riešenie $\gamma_{2v/\varepsilon}\left(\frac{\epsilon}{2}t\right)$ existuje na intervale $(-\epsilon, \epsilon)$, $\gamma_v(t)$ teda existuje na $(2, 2)$. $\square$

10.12. Exponenciálne zobrazenie a dokončenie dôkazu Vety 10.10. Ak ϵ je ako v 10.11, pre $\|v\| \leq \epsilon$ definujeme

$$\exp_p(v) = \gamma_v(1).$$

Z homogenity (Lemma 10.11) vyplýva

$$\gamma_v(t) = \exp_p(tv).$$

Z vety 10.10 vyplýva, že zobrazenie

$$\Psi(p, v) = (p, \exp_p(v))$$

je C^r v okolí bodu $(p, 0)$.

Zrejme platí $\Psi(p, 0) = (p, p)$. Ďalej platí

$$D\Psi(p, 0) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ D_p \exp_p(v) & D_v \exp_p(v) \end{pmatrix}.$$

Ak je $D_v \exp_p(v)$ regulárny operátor, potom je regulárny aj operátor $D\Psi(p, 0)$. Ak to je pravda, je podľa vety o inverznej funkcii Ψ v okolí bodu $(p, 0)$ lokálny difeomorfizmus. To značí, že ku každej dvojici (p, ϵ) s ϵ dosť blízkym p existuje v také, že $\exp_p(v) = q$. A to je tvrdenie vety.

Zostáva teda dokázať, že $D_v \exp_p(v)$ je regulárny operátor.

Rovnicu (10.8) zapíšeme ako systém diferenciálnych rovníc 1. rádu

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= U(\gamma) y^2. \end{aligned} \tag{10.9}$$

Potom $\exp_p(v)$ je x-ovou zložkou zobrazenia

$$\Phi(p, v) = (x(1), y(1))$$

kde $(x(t), y(t))$ je riešením (10.9) s počiatočnou podmienkou $x(0) = p$, $y(0) = v$.

Platí

$$\Phi(p, v) = \begin{pmatrix} p + \int_0^1 y(t) dt \\ v - \frac{1}{2} \int_0^1 R^{-1}(x(t)) DR(x(t)) \dot{y}^2(t) dt. \end{pmatrix}$$

Z diferencovateľnosti riešenia vzhľadom na počiatočné podmienky vyplýva $\|y(t)\| = O(\|v\|)$ pre $0 \leq t \leq 1$, preto

$$\|y(t)\| = v + \int_o^t O(\|v\|^2) dt = v + O(\|v\|^2);$$

z toho vyplýva

$$\exp_p(v) = p + \int_0^1 \left[v + O(\|v\|^2) \right] dt = p + v + O(\|v\|^2),$$

a teda

$$D_v \exp_p(v)|_{v=0} = I.$$

□

10.13. Najkratšia spojnica dvoch bodov. Výsledok z 10.10 ešte neznamená, že pre dva dostatočne blízke body je geodetická čiara ich najkratšou spojnicou.

Uzavrieť dôkaz tejto skuto4nosti by bolo možné dvoma spôsobmi:

- dokázať, že geodetická čiara spĺňa postačujúce podmienky pre minimum
- dokázať, že najkratšia spojnica dvoch bodov existuje.

Naznačíme myšlienku druhej cesty dôkazu, v ktorej je však medzera. Najprv dokážeme nasledujúcu vetu.

Veta. *Nech R je Riemannova metrika na $\mathbb{R}^n$ a nech $p, q \in \mathbb{R}^n$. K danému $L > 0$ existuje krivka $\hat{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, spájajúca body p, q, ktorá má najmenšiu dĺžku spomedzi všetkých lipschitzovských kriviek $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ s Lipschitzovskou konštantou L, spájajúcich p, q.*

Čo nám dáva táto veta v kontexte úlohy 10.7 ?

Lipschitzovská funkcia je absolútne spojitá, teda skoro všade diferencovateľná. Z variačného počtu je známe, že Eulerova rovnica je nutnou podmienkou minima aj v takejto triede funkcií, ak je podintegrálna funkcia diferencovatelná. Nech teda M je Riemannova varieta, $p \in M$ a $U \subset V$ sú okolia bodu p také že v zmysle Vety 10.10 je každý bod $q \in V$ v U spojený s bodom p jedinou geodetickou čiarou. Ak okolie V bodu p urobíme dosť malým, potom najkratšia spojnica bodov p, q zrejme nemôže opustiť U. Ak by sme vedeli zaručiť, že jej derivácia je (aspoň skoro všade) nenulová (a teda V je pozdĺž nej pre skoro všetky t diferencovateľná) musela by byť geodetickou čiarou a tá je podľa Vety 10.10 jediná - a to bez ohľadu na L. Dostávame teda

10.14 Dôsledok. Nech M je Riemannova metrika, $p \in M$. Potom existujú okolia $V \subset U$ bodu p také, že pre každé $q \in V$ jediná geodetická čiara v U, spájajúca p a q má najkratšiu dĺžku spomedzi všetkých hladkých kriviek v U spájajúcich p a q.

Medzera v úvahe je v tom, že dôkaz Vety 10.13 nám nenulovosť derivácie spojnice minimálnej dĺžky nezaručí. V tomto momente neviem túto medzeru preklenúť.

10.15 Dôkaz Vety 10.13. Veta 10.13 patrí skôr do variačného počtu, preto dôkaz uvedieme iba v hrubých rysoch.

Označíme X_L priestor lipschitzovských kriviek $[0,1] \to \mathbb{R}^n$, spájajúcich p a q, $S(\gamma) = \int_0^1 (R(\gamma(t))\dot{\gamma}^2(t))^{1/2} dt$ dĺžku krivky γ. Nech $\{\gamma_n\}$ je postupnosť z X_L taká, že $S(\gamma_n) \to \inf_{\gamma \in X_L} S(\gamma)$. Potom $\{\dot{\gamma}_n\}$ je ohraničená postupnosť v $L^2(0,1)$ a $\{\gamma_n\}$ je rovnomerne ohraničená a rovnomerne spojitá. Možno teda bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že existujú funkcie $\gamma \in X_L$, $y \in L^2[0,1]$ také, že $\gamma_n \to \gamma$ rovnomerne a $\dot{\gamma}_n \to y$ slabo. Keďže pravá strana rovnosti

$$\gamma_n(t) = p + \int_0^t \dot{\gamma}_n(s) ds \tag{10.9}$$

je pre každé t ohraničeným lineárnym funkcionálom na $L^2(0,t)$, možno v (10.9) urobiť limitný prechod, z ktorého vyplýva $y = \dot{\gamma}$ a súčasne $|\dot{\gamma}| \leq L$.

Platí

$$\int_0^1 (R(\gamma_n)\dot{\gamma}_n^2)^{1/2} dt - \int_0^1 (R(\gamma)\dot{\gamma}^2)^{1/2} dt \leq I_1 + I_2,$$

kde

$$I_1 = \int_0^1 |(R(\gamma_n)\dot{\gamma}_n^2)^{1/2} - (R(\gamma)\dot{\gamma}_n^2)^{1/2}|dt$$
$$\leq \int_0^1 \omega(|R(\gamma_n) - R(\gamma)|L^2)dt \to 0, \qquad (10.10)$$

$$\omega(\delta) = \sup\left\{|\xi^{1/2} - \eta^{1/2}| : \xi, \eta \geq 0, |\xi - \eta| \leq \delta\right\} \to 0$$

pre $\delta \to 0$ a

$$I_2 = \int_0^1 (R(\gamma)\dot{\gamma}_n^2)^{1/2}dt - \int_0^1 (R(\gamma)\dot{\gamma}^2)^{1/2}dt.$$

Funkcionál $y \mapsto \int_0^1 (R(\gamma(t))y^2(t))^{1/2}dt$, $L^2\,(0,1) \to \mathbb{R}$ je zrejme spojitý; dokážme, že je konvexný. K tomu stačí dokázať, že zobrazenie $y \mapsto (y^TRy)^{1/2}$ je konvexné pre ľubovoľnú kladne definitnú symetrickú maticu R. Pre takúto maticu R však existuje kladne definitná symetrická matica $R^{1/2}$ taká, že $(R^{1/2})^2 = R$ a teda platí

$$y^TRy = (y^TR^{1/2}R^{1/2}y)^{1/2} = \langle R^{1/2}y, R^{1/2}y\rangle^{1/2} = \|R^{1/2}y\|,$$

zobrazenie $y \mapsto^T Ry$ je teda konvexné ako kompozícia lineárneho zobrazenia $y \mapsto R^{1/2}y$ a konvexnej normy.

Vo funkcionálnej analýze sa dokazuje, že spojitý konvexný funkcionál je slabo polospojitý zdola, t.j. pre ľubovoľnú slabo konvergentnú postupnosť jeho hodnota v limitnom bode nepresahuje dolnú limitu jeho hodnôt v členoch slabo konvergentnej postupnosti. V našom prípade to značí

$$\int_0^1 (R(\gamma)\dot{\gamma}^2)^{1/2}dt \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_0^1 (R(\gamma)\dot{\gamma}_n^2)^{1/2}dt. \qquad (10.11)$$

Tvrdenie vety je bezprostredným dôsledkom (10.10) a (10.11).

10.16. Cvičenia.

1. Dokážte, že funkcie Θ_i z dôkazu Vety 10.4 spĺňajú požiadavky (a) - (d) vety.
2. Dokážte, že ak M je súvislá Riemannova varieta, potom infimum dĺžok kriviek, spájajúcich jej dané dva body, spĺňa axiómy pre metriku.
3. Dokážte, že každý úsek najkratšej hladkej spojnice dvoch bodov na Riemannovej variete je najkratšou hladkou spojnicou koncových bodov úseku
4. Nech U je otvorená podmnožina Riemmannovej variety M a $p \in U$. Potom existuje okolie V bodu p také, že najkratšia spojnica ľubovoľných dvoch bodov z V leží v U.

11. Súvislosti s klasickou mechanikou

Cieľom tejto kapitoly je dať predstavu o tom, ako môže teória diferencovateľných variet prispieť k porozumeniu napr. mechanických pohybov. Keďže materiál ďaleko presahuje možnosti rozsahu textu, viacero výsledkov a argumentov je uvedených iba náznakovo.

11.1 Princíp najmenšej akcie. Galileov a Fermatov princíp.. Podľa 2. Newtonovho zákona je sila, pôsobiaca na hmotný bod x rovná súčinu hmotnosti a zrýchlenia. Platí teda

$$m\ddot{x} = F, \tag{11.1}$$

kde $x \in \mathbb{R}^3$ je poloha bodu, m jeho hmotnosť a F sila, ktorá na bod pôsobí. Tento zákon má zmysel aj pre $x \in \mathbb{R}^n$ v prípade $n > 3$ - x vtedy reprezentuje nie polohu jedného bodu, ale napr. polohy viacerých bodov, atď.

Ak ide o *konzervatívny* pohyb, je sila F funkciou iba polohy a je určená *potenciálom* $U(x)$ predpisom

$$F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x}(x). \tag{11.2}$$

Ľahko sa presvedčíme, že rovnica (11.2) je Eulerovou rovnicou pre variačnú úlohu minimalizácie *akcie*

$$\int L(x, \dot{x})dt \to \min,$$

kde *Lagrangián* úlohy L je daný formulou

$$L(x, \dot{x}) = T(\dot{x}) - U(x)$$

a $T(\dot{x}) = \dot{x}^2/2$ je *kinetická energia.* Platí teda *princíp najmenšej akcie*: pohyb v potenciálovom silovom poli sa koná po *extremálach akcie.* Bezprostredným výpočtom sa môžeme presvedčiť. že pohyb zachováva celkovú mechanickú energiu $H = T + U$ - preto sa nazýva *konzervatívnym.*

Pri absencii sily F ($U \equiv \text{const}$) sú extremálami priamky a pohyb po nich je rovnomerný, čo je *Galileov princíp.*

Kinetická energia je vlastne tenzorové pole Riemannovej metriky, generovanej prirodzeným skalárnym súčinom geometrickej priestorovo homogénnej a izotropnej euklidovskej štruktúry $\mathbb{E}^n$.

Vo fyzike však majú zmysel aj úlohy, v ktorých sa prirodzená Riemannova metrika Euklidovského priestoru nahradí inou Riemannovou metrikou, ktorej vzdialenosť nie je ani priestorovo homogénna ani izotropná. Po geodetických čiarách Riemannovej metriky, opisujúcej vlastnosti prostredia sa šíri napríklad svetlo. Keďže podľa 10.8 sú extremály akcie súčasne extremálami dĺžky, dostávame *Fermatov princíp*: svetlo sa šíri tak, že každý bod na svojej trajektórii dosiahne v najkratšom možnom čase.

11.2. Pohyb po variete. D'Alembertov princíp virtuálnych posunutí. Možnosť zavedenia Riemannovej metriky nám umožňuje formulovať princíp najmenšej akcie s obmedzeniami tak, že ako kinetická energia sa vezme vhodná Riemannova metrika.

Táto myšlienka musí byť samozrejme v súlade s tým, keď varieta M je prirodzene podmnožinou geometrického priestoru možných polôh $\mathbb{E}^n$.

Ak je pohyb v takomto prípade viazaný na varietu M, musí to byť vzhľadom na Galileiho princíp dôsledkom *síl väzby.* Od sily väzby je prirodzené požadovať, aby sama v neprítomnosti iných síl pohyb po variete nespôsobila. Táto podmienka je splnená, ak sila P je kolmá na všetky smery, v ktorých sa bod po variete môže pohybovať, t.j.

$$P \perp \delta x \quad \text{pre všetky } \delta x \in T_x M. \tag{11.3}$$

Táto podmienka sa nazýva *d'Alambertov princíp virtuálnych posunutí.* Jeho alternatívna formulácia znie, že práca sily väzby pri ľubovoľnom virtuálnom posunutí je nulová.

Ak $M = \{x : G(x) = 0\}$, $\quad G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ je hladká a 0 je jej regulárny bod, možno podmienku (11.3) ekvivalentne prepísať do tvaru

$$\langle P, \delta x\rangle = 0 \text{ pre každé } \delta x \text{ také, že } DG(x)\delta x = 0. \tag{11.4}$$

To je ale podmienka riešiteľnosti (hodnosť matice rozšírenej rovná sa hodnosti matice sústavy) systému rovníc

$$P = [DG(x)]^T \lambda. \tag{11.5}$$

Rovnica (11.5) geometricky značí, že P musí byť prvkom lineárneho priestoru, vytvoreného bázou priestoru kolmých vektorov na T_xM.

Pohyb na variete $G(x) = 0$ bez prítomnosti iných než väzbových síl je teda v zmysle Newtonovho zákona opísaný rovnicou

$$m\ddot{x} = [DG(x)]^T \lambda \tag{11.6}$$

kde na určenie λ je k dispozícii ďalšia rovnica $G(x) = 0$. Všimnime si, že (11.5) je Eulerovou rovnicou pre funkcionál

$$\int \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - G(x)\lambda\right] dt.$$

K úlohe pohybu na variete môžeme alternatívne pristupovať takto:

Ak neviazaný pohyb v $\mathbb{E}^n$ sa koná po extremálach akcie, potom, viazaný na variete $G(x) = 0$ by sa mal diať po extremálach variačnej úlohy

$$\int T dt$$

pri väzbe $G(x) = 0$. Eulerova-Lagrangeova rovnica pre túto úlohu je (11.5), teda obidva prístupy sú v súlade.

11.3. Integrály pohybu a Noetherovej princíp. Nech M je Riemannova varieta a L je tenzorové pole typu (0,2). Lagrangeovou rovnicou pre L nazývame Eulerovu rovnicu pre extremálu funkcionálu $\int L dt$.

V lokálnych súradniciach bude mať táto rovnica tvar

$$D_x L - \frac{d}{dt} D_{\dot{x}} L = 0 \qquad (\delta x = (x, \dot{x}))$$

Integrálom vektorového poľa nazývame funkciu, ktorá je konštantná na jeho integrálnych čiarách. Hovoríme, že integrál je *netriviálny*, ak nie je konštantný.

Nasledujúcu definíciu uvedieme pre jednoduchosť v lokálnych súradniciach.

Hovoríme, že Lagrangeova funkcia $L(q, \dot{q})$ je invariantná vzhľadom na transformáciu $h : M \to M$, ak platí

$$L(h(q), Dh(q)\dot{q}) = L(q, \dot{q}).$$

Ako príklad vezmime Lagrangián

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - U(q_2, q_3);$$

ktorý je invariantný vzhľadom na ľubovoľný posun

$$h^\xi(q_1, q_2, q_3) = (q_1 + \xi, q_2, q_3).$$

Veta (E. Noetherová). *Nech L je invariantný vzhľadom na difeomorfizmy h^Θ z hladkého jednoparametrického systému transformácií $\{h^\Theta : \Theta \in \mathbb{R}\}$ a platí $h^0 = id$. Potom Lagrangeova rovnica pre L má netriviálny integrál*

$$I(q, \dot{q}) = D_{\dot{q}} L \frac{dh^\Theta}{d\Theta}|_{\Theta=0}.$$

Dôkaz. Z invariantnosti L vyplýva

$$\begin{aligned} 0 &= D_\Theta L(h^\Theta(q(t)), Dh^\Theta(q(t))\dot{q}(t)) \\ &= D_\Theta L(h^\Theta(q(t)), \frac{d}{dt} h^\Theta(q(t))) = \end{aligned}$$

(v ďalšom vynechávame argumenty)

$$\begin{aligned} &= D_q L D h^\Theta + D_{\dot{q}} L D_t D_\Theta h^\Theta = \\ &= D_q L D h^\Theta + \frac{d}{dt}(D_{\dot{q}} L D h^\Theta) - \frac{d}{dt}(D_{\dot{q}} L) D h^\Theta \\ &= (D_q L - \frac{d}{dt} D_{\dot{q}} L) D h^\Theta - \frac{d}{dt}(D_{\dot{q}} L D h^\Theta). \end{aligned}$$

Pretože q je extremála pri $\Theta = 0$, pre $\Theta = 0$ platí

$$D_q L - \frac{d}{dt} D_{\dot{q}} L = 0, \text{ a teda aj}$$
$$\frac{d}{dt}(D_{\dot{q}} L D h^\Theta) = 0.$$

□

11.4. Pohyb tuhého telesa a topologická klasifikácia dvojrozmerných variet.

Konfiguračným priestorom (t.j. priestorom polôh) tuhého telesa je $SO(3)$) (Príklad 2.6). Pohybové rovnice pre pohyb tuhého telesa sa dostanú ako limitný prípad pohybových rovníc pre konečný počet hmotných bodov s väzbami. Je to pohyb po variete, danej rovnicami

$$\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 = \text{ const },\ \|\mathbf{x}_0\| = \text{const},$$

kde $\mathbf{x}_i, i = 0, \ldots, N$ je polohový vektor i-tého bodu, $\mathbf{x}_0$ je polohový vektor upevneného bodu. Lagrangián pohybu je

$$L = \sum_i m_i \dot{\mathbf{x}}_\mathbf{i}^2 - \sum_{i,j} \lambda_{ij} \|\mathbf{x_i} - \mathbf{x_j}\|^2 - \lambda_0 \|\mathbf{x_0}\|^2. \tag{11.7}$$

Lagrangián (11.7) je invariantný vzhľadom na transformácie násobenia maticami z $SO(3)$, pretože tieto násobenia zachovávajú dĺžku.

Limitný prechod pre $N \to \infty$, ktorým sa dostanú rovnice pohybu v $SO(3)$, je dosť zložitý a vynechávame ho. Dôležité je, že sa pri ňom zachová invariantnosť Lagrangiánu vzhľadom na násobenie maticami z $SO(3)$.

Špeciálnymi prípadmi matíc z $SO(3)$ sú matice otáčania podľa osí x, y, z,

$$h_x^\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

(analogicky h_y^Θ, h_z^Θ) ktoré tvoria grupu. Každej z týchto troch grúp otočení zodpovedá podľa Noetherovej vety integrál pohybu I_x, I_y, I_z (sú to zložky *momentov zotrvačnosti*). Keďže ide o konzervatívny pohyb, ďalším integrálom je energia H.

G - rozmerný stavový priestor sa takto rozpadá na 4- parametrický systém množín

$$\Sigma_c = \{I_x = c_1, I_y = c_2, I_z = c_3,\ H = c_4\}$$

$(c = (c_1, c_2, c_3, c_4))$.

Podľa Sardovej vety sú skoro všetky hodnoty vektora c regulárnymi hodnotami. Pre takéto hodnoty c je množina Σ_c kompaktnou orientovateľnou dvojrozmernou varietou.

Trajektórie skoro všetkých pohybov sú teda integrálnymi čiarami vektorových polí na kompaktných orientovateľných dvojrozmerných varietach (ďalej KO DV).

Výsledky diferenciálnej topológie dávajú klasifikáciu takýchto variet podľa ich *génusu* (rodu). Geometricky si možno každú KO DV predstaviť ako sféru $\mathbb{S}^2$ s prilepenými uchami, ktorých počet je génus. Varieta génusu 0 je teda $\mathbb{S}^2$, varieta génusu 1 je $\mathbb{T}^2$.

Invariantom tejto klasifikácie je *Eulerova charakteristika*, pomocou ktorej možno dokázať, že jedinou KO DV, na ktorej existuje vektorové pole bez nuly je $\mathbb{T}^2$. Na druhej strane, v prípade voľného pohybu ($U \equiv \text{const}$) je pre $c_4 > 0$ zrejmé, že pohyb na KO DV $\sum_c$ nemá stacionárny bod. Trajektóriami pohybu na KO DV pre $c_4 > 0$ sú teda integrálne čiary vektorového poľa na $\mathbb{T}^2$ bez kritických bodov.

Dá sa ukázať, že vhodnou transformáciou možno takéto vektorové pole na $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pretransformovať na tvar

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1(c_4), \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2(c_4).$$

Podľa toho, či sú ω_1, ω_2 súdeliteľné alebo nie sú buď všetky pohyby periodické s rovnakou periódou, alebo je trajektória každého z pohybov skoro periodická a husto pokrýva $\mathbb{T}^2$.