Mikroekonómia

Pavel Brunovský

Za to, že tento text dostal TEXovskú formu treba poďakovať Braňovi Ondrušovi, ktorý si dal tú prácu, že ho prepísal z mojich rukou písaných príprav k prednáškam. Z vlastnej skúsenosti viem oceniť, čo je to za prácu.

Obsah

Úvod

Mikroekonómiu môžeme charakterizovať ako teóriu racionálneho správania elementárnych ekonomických subjektov (agents; firma, spotrebiteľ) v trhovom prostredí a z neho vychádzajúcich záverov pre správanie ekonomiky ako celku. Na rozdiel od makroekonómie, ktorú ekonomická teória pozná má viacero pohľadov (klasický, keynesovský, ...), je mikroekonómia viac-menej jednotná a vychádza z klasickej teórie.

Mikroekonómia je **teória** a dáva skôr určitý kvalitatívny, filozofický pohľad na ekonómiu než praktické číselné návody pre rozhodovanie v konkrétnych situáciách. O to prekvapujúcejšie je, že sa štáty v svojej hospodárskej politike nezriedka dopúšťajú hrubých prehreškov voči elementárnym mikroekonomickým princípom s veľmi škodlivými dôsledkami pre nimi riadenú ekonomiku.

Ako všetky teórie, aj mikroekonómia je založená na určitých idealizovaných predpokladoch, ktoré v skutočnosti nie sú úplne splnené. Už samotný základný predpoklad racionality platí iba obmedzene. Napríklad, výrobcovia sa často reklamou snažia racionalitu spotrebiteľa potlačiť, čo mikroekonomická teória neberie do úvahy.

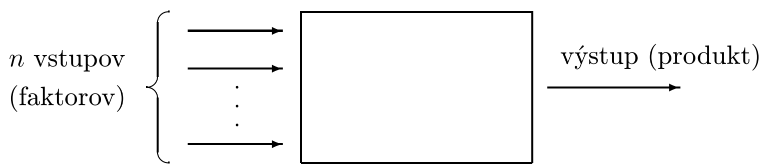
Vzhľadom na obmedzenosť rozsahu predmetu, a to že dôraz budeme klásť na rozvoj ekonomického myslenia, dovolíme si občas ústupky voči matematickej rigoróznosti.

V základnej teórii delíme ekonomické subjekty na dva typy: výrobcu (firmu) a spotrebiteľa. Týmto dvom typom ES budú postupne venované prvé dve kapitoly. V ďalších kapitolách potom z elementárnych teórií o racionálnom správaní týchto subjektov vyvodíme zákonitosti o správaní trhu ako celku. Napokon sa budeme venovať aj otázke racionálneho rozhodovania v prípade, že dôsledky rozhodnutí sú neisté.

1 Technológie a produkčná funkcia

1.1 Teória firmy

Firmu si predstavujeme ako „čiernu skrinku“ s m výstupami (**produktami**) a n vstupmi (**faktormi**). Abstrahujeme od materiálnej stránky produktov, faktorov a produkčného procesu. Obmedzíme sa na prípad jedného produktu ($m = 1$), v ktorom je teória úplnejšia a výpovednejšia.



Obr. 1.

Označíme $x = (x_1, \ldots, x_n)$ vektor faktorov, ekonomický zmysel budú mať iba vektory $x \in \mathbb{R}^n_+$, t. j. spĺňajúce $x_i \geq 0$ pre $1 \leq i \leq n$. Ak $x_i \leq \widetilde{x_i}$ pre $1 \leq i \leq n$, budeme písať $x \leq \tilde{x}$.

Ako príklad uveďme povedzme hydinovú farmu, kde faktormi sú pracovná sila, energia (ktorou môže byť alternatívne elektrina, alebo plyn), krmivo, atď., produktom sú kurčatá (ale prípadne aj externality – hnojivo).

Zvoľme časovú jednotku. *Technológiou* nazveme vektor $z = (x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+$, kde $x_1, \ldots, x_n$ interpretujeme ako objemy spotreby faktorov a y ako objem výroby za zvolenú jednotku času.

Firmu charakterizujeme *množinou možných technológií* $Y \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$. Jej body $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n, y)$ interpretujeme tak, že množstvo produktu y môže firma za fixovanú jednotku času vyrobiť pri spotrebe faktorov $(x_1, \ldots, x_n)$.

Od množiny možných technológií (kratšie technologickej množiny) žiadame splnenie niekoľkých axióm, čiastočne prirodzených a čiastočne technických.

Axiómy technologickej množiny:

Y1: $(x, 0) \in Y$ pre všetky $x \in \mathbb{R}^n_+$

Y2: $(0, y) \in Y$ vyplýva $y = 0$

Y3: Z $(x, y) \in Y$ a $\tilde{x} \geq x$ vyplýva $(\tilde{x}, y) \in Y$

Y4: Y je konvexná a uzavretá.

Interpretácia axiómov:

Y1: Nulové množstvo sa dá vyrobiť pri akýchkoľvek množstvách faktorov.

Y2: S nulovými množstvami faktorov sa nedá vyrobiť kladné množstvo produktu.

Y3: Ak sa zmenia faktory bez toho, že by sa objem niektorého z nich znížil, dá sa vyrobiť rovnaký objem produktu.

Y4: Uzavretosť je vyslovene matematicko-technická záležitosť; konvexita je zdôvodnená takto: Nech $(x, y), (\tilde{x}, \tilde{y})$ sú technológie z Y. Za diel $\alpha \in [0, 1]$ časovej jednotky by sa malo technológou x vyrobiť aspoň αy produktu, rovnako to platí o technológii $\tilde{x}$. To značí, že ak sa diel $\alpha \in [0,1]$ časovej jednotky vyrába technológiou x a zvyšok času technológiou $\tilde{x}$, za jednotku času by sa malo vyrobiť aspoň $\alpha y + (1-\alpha)\tilde{y}$ produktu. Faktorov sa pritom spotrebuje $\alpha x + (1-\alpha)\tilde{x}$. Platí teda

$$(\alpha x + (1-\alpha)\tilde{x},\ \alpha y + (1-\alpha)\tilde{y}) \in Y,$$

čo znamená, že Y je konvexná.

Poznámky.
1. Z hľadiska modelovania reality majú axiómy rozličné nedostatky – napríklad neobmedzenú deliteľnosť objemov produktov alebo faktorov.
2. V literatúre sa vyskytuje viacero axiomatík, sú však ekvivalenetné.
3. Predpoklad $x \in \mathbb{R}^n_+$ v **Y1** sme urobili pre zjednodušenie, je ho možno pozmeniť na $x \in X$, kde $X \in \mathbb{R}^n_+$ je konvexný uzavretý kužeľ.

Nech Y je technologická množina. Jej *produkčnou funkciou* $f : R^n_+ \to \mathbb{R}$ nazývame funkciu

$$f(x) = \sup\{y : (x,y) \in Y\} \quad (= \max\{y : (x,y) \in Y\}$$

(Všimnime si, že vzhľadom na uzavretosť Y možno supremum nahradiť maximom.)

Veta 1.1 (vlastnosti produkčnej funkcie)**.**

f1: *f je definovaná a konkávna*

f2: *$f(0) = 0, f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}^n_+$*

f3: *Ak $\tilde{x} \geq x$ potom $f(\tilde{x}) \geq f(x)$*

f4: *Ak $f(x_0) > 0$ pre nejaké x_0, potom $f(x) > 0$ pre každé $x \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$*

f5: *Ak f spĺňa* **f1-f3***, potom množina $Y = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^n_+,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ je technologickou množinou.*

Dôkaz. Aby sme dokázali, že f je definovaná, musíme ukázať, že pre každé $x \in \mathbb{R}^n_+$ je $\sup\{y\ :\ (x,y) \in Y\} < \infty$.

Predpokladajme, že by to nebolo pravda, t. j. existovalo by $x \in \mathbb{R}^n_+$ a postupnosť $\{y_n\} \to \infty$ taká, že $(x, y_n) \in Y$. Z **Y1** a **Y4** by potom vyplynulo, že $(x/y_n, 1) \in Y$ pre každé n. Z $y_n \to \infty$ ale vyplýva $(x/y_n, 1) \to (0,1)$ a vzhľadom na uzavretosť Y (vlastnosť Y4) aj $(0,1) \in Y$, čo je spor s **Y2**.

Konkávnosť f vyplýva bezprostredne z konvexnosti Y. Vlastnosť **f2** vyplýva z **Y1** a **Y2**, **f3** vyplýva z **Y3** a **f4** z **Y4**. Detaily dôkazu sa prenechávajú čitateľovi ako cvičenie, **f5** sa dokazuje jednoduchým overením vlastností. □

Vzhľadom na **f5** môžeme firmu plne charakterizovať produkčnou funkciou, čo aj v ďalšom budeme robiť.

Pre produkčné funkcie sa zavádza nasledovná terminológia: ak pre každé $\gamma > 1$ platí:

$f(\gamma x) > \gamma f(x)$, hovoríme, že firma má rastúce výnosy z rozsahu.

$f(\gamma x) < \gamma f(x)$, firma má klesajúce výnosy z rozsahu.

$f(\gamma x) = \gamma f(x)$, firma má konštantné výnosy z rozsahu.

Poznamnajme, že produkčná funkcia s rastúcimi výnosmi z rozsahu nemôže byť konkávnou a nie je teda konzistentná s vlastnosťou **f1**; na takéto nedôslednosti sa mikroekonómii treba pripraviť.

1.2 Izokvanty

Hladina úrovne funkcie f,

$$I_c = \{(x_1, \dots, x_n) : f(x_1, \dots, x_n) = c\}$$

sa nazýva **izokvantou**. Očakávame, že by to mala byť nadplocha dimenzie $n-1$. To je pravda napríklad vtedy, ak

- f je C^1 (spojite diferencovateľná)
- f pre každé $x^0 \in I_c$ existuje i také, že $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \neq 0$.

Potom totiž z vety o implicitnej funkcii vyplýva, že lokálne v okolí x^0 existuje jediná funkcia $x_i = \varphi(x_{-i})$ (kde $x_{-i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$) taká, $x_i^0 = \varphi(x_{-1}^0)$ a $f(x_1, \dots, x_n) = c$ práve vtedy, ak $x_i = \varphi(x_{-i})$.

Pre izokvanty platí:

a) Pre každé $c_0 \geq 0$ je $J_{c_0} = \bigcup_{c \geq c_0} I_c \subset \mathbb{R}_+^n = \{x : f(x) \geq c_0\}$ konvexná množina a $0 \notin J_{c_0}$ ak $c_0 > 0$.

b) Hovoríme, že produkčná funkcia f je *ostro monotónna*, ak z $x \geq \tilde{x}$, $x \neq \tilde{x}$ vyplýva $f(x) > f(\tilde{x})$. Ak $x, \tilde{x} \in I_c$ a $\tilde{x}_{-i} \geq x_{-i}$, potom $\tilde{x}_i \leq x_i$. Dôkaz sa prenecháva čitateľovi ako cvičenie.

Z toho vyplýva, že ak sú splnené predpoklady b), izokvanty I_c sú v prípade $n = 2$ grafy klesajúcich konvexných funkcií.

Technickou mierou substitúcie (technical rate of substitution) $(TRS)_{ij}$ medzi faktormi i, j nazývame záporne vzatý lokálne limitný (hraničný) objem faktoru j, ktorým musíme nahradiť jednotku faktora i, aby sme udržali množstvo produktu na rovnakej úrovni.

Ak takéto množstvo označíme $x_j = \psi(x_i)$ má teda platiť

$$f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, \psi(x_i + \Delta x_i), \dots) = c.$$

Ak f je C^1, rozvojom do Taylorovho radu dostávame

$$f(x) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\psi'(x_i)\Delta x_i + \vartheta(\Delta x_i) = c = f(x),$$

kde $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\vartheta(\Delta x_i)}{\Delta x_i} = 0$. Pre $\Delta x_i \to 0$ dostaneme

$$(TRS)_{ij}(x) = -\psi'(x_i) = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)}{\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)}$$

(ak $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \neq 0$).

Technická miera substitúcie predstavuje *citlivosť* zmeny faktora j na zmenu faktora i pri dodržaní objemu výroby. (Vo všeobecnosti, ak $y = f(x_1, \dots, x_n)$ je ľubovoľná funkcia, citlivosť y na zmenu premennej x_i v bode x meriame parciálnou deriváciou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.)

Slabinou pojmu citlivosti je, že závisí od voľby jednotiek, v ktorých meriame premenné x_i a y. Preto sa zavádza bezrozmerná *elasticita*. Je to hraničný podiel zmeny y a zmeny x_i, ak za jednotky vezmeme ich aktuálne veľkosti, teda

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\frac{x_i}{f(x)}.$$

V prípade izokvánt sa zavádza *elasticita substitúcie*. Definuje sa za predpokladu striktnej konvexnosti závislosti x_j od x_i pozdĺž izokvanty pri ostatných faktoroch fixných. Vtedy je totiž TRS_{ij} pozdĺž izokvanty ostro rastúcou funkciou x_i, možno ňou teda izokvantu parametrizovať. Elasticita substitúcie σ_{ij} sa definuje ako elasticita závislosti podielu x_j/x_i od TRS_{ij}, teda

$$\sigma_{ij} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\mathrm{d}(TRS_{ij})} \frac{TRS_{ij}}{\frac{x_j}{x_i}}.$$

Elasticita substitúcie nie je teda elasticitou funkcie $TRS_{ij}(x_i)$ v zmysle, v akom sa elasticita chápe vo všetkých ostatných prípadoch!

1.3 Príklady technológií a produkčných funkcií

1. Empirická produkčná funkcia

V $\mathbb{R}^n_+$ máme daných N bodov $x^{(j)}, j = 1, \dots, N$, pre ktoré zistíme $f(x^{(j)})$. Ak platí

$$f(x^{(i)}) \geq \sup \left\{ \sum_j \lambda_j f(x^{(j)}) \ : \ x^{(i)} = \sum_j \lambda_j x^{(j)}, \ \sum \lambda_j = 1, \ \lambda_j \geq 0 \right\}$$

a

$$f(x^{(j)}) \geq f(x^{(i)}) \qquad \text{ak } x^{(j)} \geq x^{(i)},$$

potom môžeme definovať $f(0) = 0$ a

$$f(x) = \sup \left\{ \sum_j \lambda_j f(x^{(j)}) \ : \ x^{(i)} = \sum_j \lambda_j x^{(j)}, \ \sum \lambda_j = 1, \ \lambda_j \geq 0 \right\}.$$

Všimnime, si že táto produkčná funkcia nie je definovaná na celom $\mathbb{R}^n_+$, ale iba na konvexnej obálke bodov $x^{(i)}$ a bodu 0. Nie je diferencovateľná, je konkávna, nie však ostro.

2. Cobbova-Douglasova produkčná funkcia

$$f(x) = c \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}, \quad a > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \leq 1$$

3. Funkcia s konštantou elasticitou

$$f(x) = \Big[\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{\rho}) \Big]^{\frac{1}{\rho}}$$

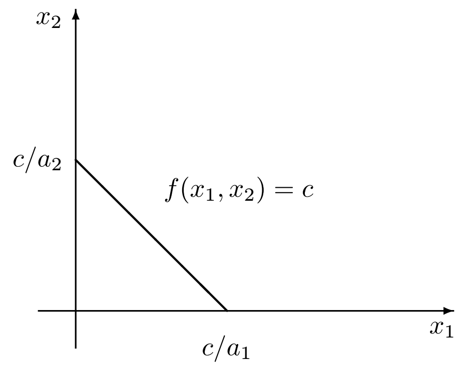
4. Produkčná funkcia dokonale zameniteľných faktorov

$$f(x) = g\left(a_1 x_1 + \dots + a_n x_n\right), \ a_i > 0,$$

kde g je rastúca konkávna. Jednotkové množstvo faktora môžeme nahradiť pevne daným množstvom iného faktora, ktoré nezávisí od bodu, v ktorom sa nachádzame:

$$(TRS)_{ij}(x) = \frac{g'(x) a_i}{g'(x) a_j} = \frac{a_i}{a_j}$$

(typická napríklad pre rozličné zdroje energie).



Obr. 2. Izokvanta produkčnej funkcie dokonale zameniteľných faktorov.

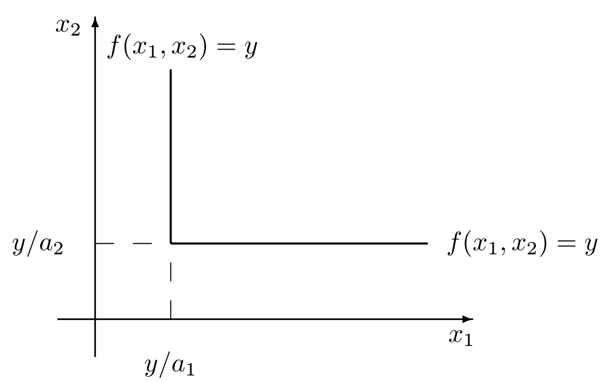
5. Produkčná funkcia dokonale komplementárnych faktorov (Leontieffova)

$$f(x) = \min\{a_1x_1, \ldots, a_nx_n\}, \qquad a_i > 0$$

Napríklad betón: aby sme vyrobili určité množstvo, potrebujeme určité množstvá vody, cementu a piesku, ktoré nemožno jedno druhým nahradiť; podobne je to s vodou a pracím práškom pri praní, alebo vodou, vajíčkami a múkou pri ceste na halušky atď.

Leontieffova produkčná funkcia nie je diferencovateľná. Pre izokvanty platí

$$I_c = \left\{x : x_i \geq \frac{c}{a_i} \text{ pre všetky } i \text{ a } x_i = \frac{c}{a_i} \text{ pre aspoň jedno } i\right\}.$$



Obr. 3. Izokvanta produčknej funkcie dokonale komplementárnych faktorov.

Všimnime si, že pre dokonale zameniteľné a dokonale komplementárne statky nie sú množiny J_c ostro konvexné (množinu J nazývame ostro konvexnou, ak z $x, \hat{x} \in J$ vyplýva $\alpha x + (1-\alpha)\hat{x} \in \operatorname{int} J$ pre každé $0 < \alpha < 1$. Limitné vzťahy medzi produkčnými funkciami sú podrobne spracované v [12].

1.4 Racionálne správanie firmy, rovnováha kompetitívnej firmy

Za racionálne správanie firmy považujeme jej snahu maximalizovať svoj zisk. Predpokladáme pritom, že pracuje v *kompetitívnom* prostredí: má tak veľa konkurenčných firiem, že jej správanie na trhu neovplyvní cenu produktu a faktorov. Považujeme ich za *exogénne* premenné.

Označíme:
p – cenu za jednotku produktu y
w_i – cenu jednotkového množstva faktora i.
Potom zisk pri technológii (x, y) je

$$py - \sum_{i=1}^{n} w_i x_i = py - \langle w, x \rangle$$

a maximálny možný zisk pri danej spotrebe faktorov x je

$$\Pi(x) = \max_{y} \{py - \langle w, x \rangle : (x, y) \in Y\} = pf(x) - \langle w, x \rangle. \tag{1.1}$$

Matematické vyjadrenie úloh racionálneho rozhodovania firmy je teda takéto:

$$\text{Nájsť} \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^n_+ \quad \text{také, že} \quad \Pi(\hat{x}) = \max_{x \in \mathbb{R}^n_+} \Pi(x).$$

Úloha (1.1) vo všeobecnosti nemusí mať riešenie, ale ak ho má a ak je f striktne konkávna, potom je toto riešenie jediné. Pripomeňme si, že postačujúcou podmienkou pre striktnú konkávnosť f je záporná definitnosť Hessiánu $D^2 f(x)$ funkcie f vo všetkých $x \in \mathbb{R}^n_+$. Ak f je C^1 a

$$\hat{x} \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+,$$

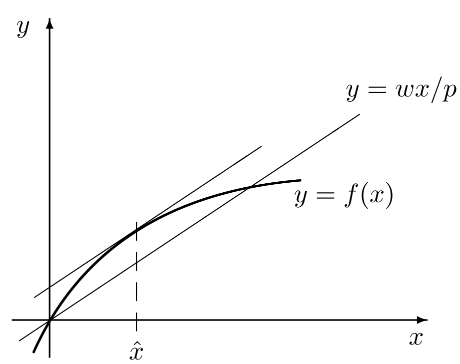
potom pre všetky i platí

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}(\hat{x}) = 0, \quad \text{teda} \quad p \frac{\partial f}{\partial x_i}(\hat{x}) = w_i, \tag{1.2}$$

vo vektorovom zápise

$$p \, \mathrm{d} f(\hat{x}) = w.$$

Riešenie úlohy (1.1) považujeme za *rovnováhu kompetitívnej firmy* – pretože ak $x = \hat{x}$, firma nemá dôvod objem výroby meniť.



Obr. 4. Rovnováha kompetitívnej firmy s jedným vstupom a jedným výstupom.

Podmienku (1.2) teraz môžeme sformulovať takto:

Veta 1.2. *Vo vnútornej kompetitívnej rovnováhe je hraničný produkt vzhľadom na každý z faktorov úmerný jeho cene.*

Prípad jedného faktora je znázornený na Obr. 4 (hraničný produkt je dotýčnicou ku grafu produkčnej funkcie).

1.5 Minimalizácia nákladov a nákladová funkcia

Úlohu maximalizácie zisku môžeme rozdeliť na dva stupne:

- úlohu minimalizácie nákladov pri danej hladine výroby
- určenie objemu výroby, pri ktorej je zisk rovný rozdielu príjmu a minimálnych nákladov najväčší.

Prvej z úloh, teda minimalizácii nákladov pri danom objeme výroby sa budeme venovať. Druhej z nich, teda hľadaniu objemu výroby, maximalizujúceho zisk bude venovaný odsek 1.7.
Riešime teda úlohu:

Dané je y (a $w \neq 0$), hľadáme $\hat{x} = \hat{x}(y) \quad (= \hat{x}(y, w))$ také, že $f(\hat{x}) \geq y$ a

$$\langle w, \hat{x} \rangle = \min \{ \langle w, x \rangle : \, f(x) \geq y \} \tag{1.3}$$

Všimnime si, že $\{x : f(x) \geq y\} = J_y$, kde J_y je definované v 1.2.

Ukážeme, že ak je $J_y \neq \emptyset$ a $w_i > 0$ pre všetky i, má táto úloha vždy riešenie:

- f ako konkávna funkcia je spojitá.
- $\langle w, x \rangle \geq 0$ a preto
$$c = \inf \left\{ \langle w, x \rangle : \, x \in J_y \right\} \geq 0.$$
- Ak $x^{(k)} \in J_y$ a $\langle w, x^{(k)} \rangle \to c$, potom $x^{(k)}$ je ohraničená. Keby totiž nebola, existovala by postupnosť $x_i^{(k_j)} \to \infty$, ale potom by platilo
$$\langle w, x^{(k_j)} \rangle \geq w_i x_i^{(k_j)} \to \infty$$
a to je spor.
- Keďže $x^{(k_j)}$ je ohraničená, môžeme z nej vybrať konvergentnú postupnosť $x^{(k_j)} \to \hat{x}$, zo spojitosti f vyplýva, že $\hat{x}$ je riešením.

Riešenie je jednoznačné vtedy, ak je množina J_y ostro konvexná. V úlohe môžeme nerovnosť pri $f(x) \geq y$ nahradiť rovnosťou, t. j. ak $\hat{x}$ je riešením úlohy (1.3), potom existuje aj riešenie $\hat{x}'$, pre ktoré platí $f(\hat{x}') = y$. Ak je f ostro rastúca, t. j. $f(x') > f(x)$ pre $x' \geq x, x' \neq x$, potom nevyhnutne $f(\hat{x}) = y$. (Dôkazy sa prenechávajú čitateľovi ako cvičenie.)

Ak $f \in C^1$ a $x \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$ je riešením úlohy (1.3) spĺňajúce $f(\hat{x}) = y$ potom podľa Lagrangeovej vety existuje $\lambda \geq 0$ také, že platí

$$w_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum w_i x_i \right) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}(\hat{x})$$

alebo

$$\begin{aligned} w &= \lambda \, \mathrm{d} f^T(\hat{x}) \\ y &= f(\hat{x}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ak vieme, že riešenie úlohy (1.3) je jediné, potom riešenie (1.4) je aj riešením úlohy (1.3).

Nákladovú funkciu (cost function) C definujeme predpisom

$$C(y) = C(y, w) = \langle w, \hat{x}(w, y) \rangle.$$

Riešenie $\hat{x}(w, y)$ úlohy (1.3) nazveme *podmienenou funkciou dopytu.*

1.6 Poznámky k počítaniu podmienenej funkcie dopytu a nákladovej funkcie

Na hľadanie $\hat{x}$ a C možno použiť systém rovníc (1.4), nemusí to však byť najvýhodnejšie. Niekedy to ani nevedie k cieľu, lebo nie sú splnené podmienky, v ktorých je (1.4) nutnou podmienkou minima. Ukážeme si to na príkladoch.

1. C-D funkcia.
Obmedzíme sa na prípad $n = 2$, teda

$$y = f(x_1, x_2) = cx_1^a x_2^b, \qquad a, b > 0,\ a + b \le 1,$$

priamočiare rozšírenie pre všeobecné n ponechávame na čitateľa. Najprv naznačíme postup, vychádzajúci z podmienky (1.4). Systém rovníc (1.4) pre túto úlohu znie

$$\begin{aligned} w_1 &= \lambda ca x_1^{a-1} x_2^b \\ w_2 &= \lambda\, cb x_1^a x_2^{b-1} \\ y &= cx_1^a x_2^b. \end{aligned}$$

predelelním prvých dvoch rovníc dostaneme

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{bw_1}{aw_2},$$

(dopyt po faktoroch je nepriamo úmerný ich cenám), teda

$$x_2 = \frac{bw_1 x_1}{aw_2}.$$

Dosadením za x_2 do tretej rovnice dostaneme rovnicu pre neznámu x_1, ktorej riešením je

$$x_1 = \left(\left(\frac{bw_1}{aw_2} \right)^{-b} \frac{y}{c} \right)^{\frac{1}{a+b}}.$$

Iný prístup: Z podmienky $y = cx_1^a x_2^b$ eliminujeme $x_2 = \left(\frac{y}{cx_1^a} \right)^{\frac{1}{b}}$ a minimalizujeme $w_1 x_1 + w_2 x_2 \Big|_{y = cx_1^a x_2^b} = w_1 x_1 + w_2 y^{\frac{1}{b}} c^{-\frac{1}{b}} x_1^{-\frac{a}{b}}$.
Platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(w_1 x_1 + w_2 y^{\frac{1}{b}} c^{-\frac{1}{b}} x_1^{-\frac{a}{b}} \right) &< 0 \qquad \text{ak } x_1 < \left(\frac{b}{a} \frac{w_1}{w_2} y^{-\frac{1}{b}} c^{\frac{1}{b}} \right)^{-\frac{b}{a+b}} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(w_1 x_1 + w_2 y^{\frac{1}{b}} c^{-\frac{1}{b}} x_1^{-\frac{a}{b}} \right) &= 0 \qquad \text{ak } x_1 = \left(\frac{b}{a} \frac{w_1}{w_2} y^{-\frac{1}{b}} c^{\frac{1}{b}} \right)^{-\frac{b}{a+b}} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(w_1 x_1 + w_2 y^{\frac{1}{b}} c^{-\frac{1}{b}} x_1^{-\frac{a}{b}} \right) &> 0 \qquad \text{ak } x_1 > \left(\frac{b}{a} \frac{w_1}{w_2} y^{-\frac{1}{b}} c^{\frac{1}{b}} \right)^{-\frac{b}{a+b}} \end{aligned}$$

Z toho vyplýva, že minimum sa v súlade s predchádzajúcim výpočtom dosahuje pri rovnakej hodnote x_1. Všimnime si, že tento spôsob výpočtu nám súčasne dáva, že extrém je minimom.

2. Dokonale zameniteľné faktory
V predchádzajúcom príklade sa eliminačný postup ukazoval ako menej elegantný. Ukážeme si

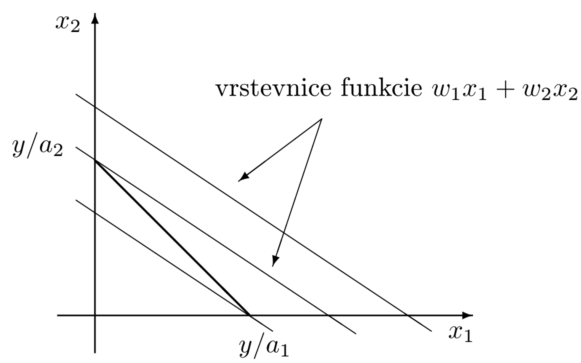
však, že má širšie použitie. Vedie k cieľu totiž aj v úlohách, v ktorých sa maximum v (1.1) dosahuje na hranici oblasti a podmienka (1.4) nie je použiteľná.

$$f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 \qquad , x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0.$$

Použitie systému (1.4) vedie k rovniciam

$$\begin{aligned} w_1 &= \lambda a_1 \\ w_2 &= \lambda a_2, \end{aligned}$$

ktoré nám nič nedávajú pre určenie x a dokonca sú splnené iba vo zvláštnom prípade, ak w je kolineárny k vektorom (a_1, a_2). Predstavujú totiž podmienku toho, že minimum sa dosahuje vo vnútornom bode, čo je v tejto úlohe splnené iba pri výnimočných hodnotách parametrov.



Obr. 5. Minimalizácia nákladov pre zameniteľné faktory – prípad $\frac{w_1}{w_2} = \frac{a_1}{a_2}$.

Druhý, eliminačný postup z príkladu 1 však k cieľu vedie: Z $a_1x_1 + a_2x_2 = y$ vypočítame $x_2 = \dfrac{y - a_1x_1}{a_2}$ a minimalizujeme

$$w_1x_1 + w_2\frac{y - a_1x_1}{a_2} = \left(w_1 - \frac{w_2a_1}{a_2}\right)x_1 + w_2\frac{y}{a_2} \tag{1.5}$$

pri podmienkach $x_1 \geq 0$ a $x_2 = \frac{y - a_1x_1}{a_2} \geq 0$. To značí, že funkcia (1.5) rastie, ak $w_1 - \frac{w_2a_1}{a_2} > 0$, t. j. $\frac{w_1}{w_2} > \frac{a_1}{a_2}$ a klesá ak $\frac{w_1}{w_2} < \frac{a_1}{a_2}$ Ako výsledok dostaneme

$$\hat{x}_1 = \begin{cases} \dfrac{y}{a_1}, & \text{ak } \frac{w_1}{w_2} < \dfrac{a_1}{a_2} \\ \text{ľubovoľné, spĺňajúce } a_1x_1 + a_2x_2 = y & \text{ak } \frac{w_1}{w_2} = \dfrac{a_1}{a_2} \\ 0, & \text{ak } \dfrac{w_1}{w_2} > \frac{a_1}{a_2}. \end{cases}$$

Formuly pre $\hat{x}_2$ sú analogické a ponechávame ich pre čitateľa ako cvičenie.

3. Leontieffova produkčná funkcia

$$y = \min\{a_1x_1, a_2x_2\} = \begin{cases} a_1x_1 & \text{ak } a_1x_1 \leq a_2x_2 \\ a_2x_2 & \text{ak } a_1x_1 \geq a_2x_2 \end{cases}$$

Ak $\min\{a_1x_1, a_2x_2\} = y$, platí

a) $w_1x_1 + w_2x_2 = w_1\frac{y}{a_1} + w_2x_2$ ak $a_1x_1 \le a_2x_2$
b) $w_1x_1 + w_2x_2 = w_1x_1 + w_2\frac{y}{a_2}$ ak $a_1x_1 \ge a_2x_2$

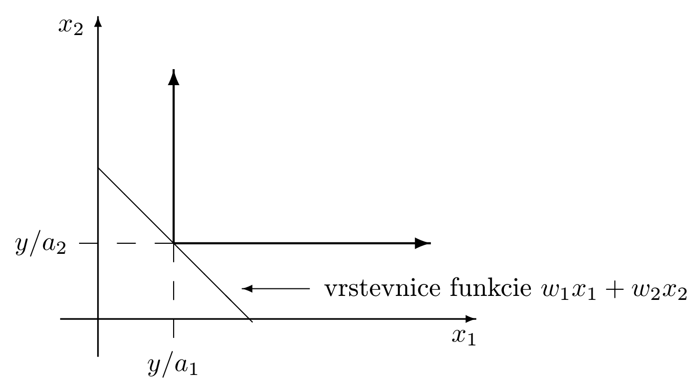
Minimum $w_1x_1 + w_2x_2$ pri pevne danom y sa teda dosahuje

v prípade a) pri $x_2 = \dfrac{a_1}{a_2}x_1 = \dfrac{a_1}{a_2}\dfrac{y}{a_1} = \dfrac{y}{a_2}$ a

v prípade b) pri $x_1 = \dfrac{a_2x_2}{a_1} = \dfrac{a_2}{a1}\dfrac{y}{a_2} = \dfrac{y}{a_1}$.

V obidvoch prípadoch sa teda minimum dosahuje v bode $\left(\frac{y}{a_1}, \frac{y}{a_2}\right)$, čo znamená, že

$$\hat{x}_1(y) = \frac{y}{a_1}, \qquad \hat{x}_2(y) = \frac{y}{a_2}$$



Obr. 6. Minimalizácia nákladov pre komplementárne faktory.

1.7 Vlastnosti nákladovej funkcie

Veta 1.3. *Predpokladajme, že f je $C^1, C, \hat{x}$ sú definované a $\hat{x} \in \operatorname{int}\mathbb{R}^n_+$. Potom platí:*

1. *Ak $w' \ge w$ potom $C(y, w') \ge C(y, w)$.*
2. *Fukcia C je homogénna stupňa 1, t. j. $C(y, \alpha w) = \alpha C(y, w)$ pre ľubovoľné $\alpha \ge 0$.*
3. *C je konkávna vo w a ak je f konkávna, tak je C konvexná v y.*
4. *Ak f má konštantné výnosy z rozsahu, potom to platí aj pre C, t. j.*
$$C(y, w) = yC(1, w) \qquad \text{pre } y > 0.$$
5. $\dfrac{\partial C}{\partial y} = \lambda$ *(= Lagrangeov multiplikátor v (1.4))*
6. *Shepardova lemma:*
$$\frac{\partial C}{\partial w_i}(y, w) = \hat{x}_i(y, w).$$

Dôkaz 1., 2., 4. prenechávame ako cvičenie.
3. Dokážeme najprv konkávnosť C vo w:

$$\begin{aligned} C(y, \alpha w + (1-\alpha)w') &= \langle \alpha w + (1-\alpha)w', \hat{x}(y, \alpha w + (1-\alpha)w')\rangle \\ &= \alpha\langle w, \hat{x}(y, \alpha w + (1-\alpha)w')\rangle + (1-\alpha)\langle w', \hat{x}(y, \alpha w + (1-\alpha)w')\rangle \\ &\ge \alpha\langle w, \hat{x}(y, w)\rangle + (1-\alpha)\langle w', \hat{x}(y, w')\rangle \\ &= \alpha C(y, w) + (1-\alpha)C(y, w'). \end{aligned}$$

Ak je f konkávna, platí

$$f(\alpha\hat{x}(y,w)+(1-\alpha)\hat{x}(y',w)) \geq \alpha f(\hat{x}(y,w))+(1-\alpha)f(\hat{x}(y',w)) = \alpha y+(1-\alpha)y',$$

teda s objemom faktorov $\alpha\hat{x}(y,w)+(1-\alpha)\hat{x}(y',w)$ možno vyrobiť objem $\alpha y+(1-\alpha)y'$ produktu. Z toho vyplýva

$$\begin{aligned}\alpha C(y)+(1-\alpha)C(y') &= \alpha\langle w,\hat{x}(y,w)\rangle+(1-\alpha)\langle w,\hat{x}(y',w)\rangle \\ &= \langle w,\alpha\hat{x}(y,w)+(1-\alpha)\hat{x}(y',w)\rangle \geq C(\alpha y+(1-\alpha)y')\end{aligned}$$

5. Tvrdenie dokážeme za predpokladu diferencovateľnosti $\hat{x}$ podľa y. Diferencovaním druhej rovnice (1.4) dostaneme

$$\mathrm{d}\, f(\hat{x})\frac{\partial\hat{x}}{\partial y}(y,w)=1,$$

z čoho vzhľadom na prvú rovnicu (1.4) dostaneme

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y,w)=\left\langle w,\frac{\partial\hat{x}}{\partial y}(y,w)\right\rangle=\lambda\,\mathrm{d}\, f(\hat{x})\frac{\partial\hat{x}}{\partial y}(y,w)=\lambda.$$

6. Pre pevne zvolené w^0 a ľubovoľné w platí

$$\begin{aligned}C(y,w) &\leq \langle w,\hat{x}(y,w^0)\rangle \\ C(y,w^0) &= \langle w^0,\hat{x}(y,w^0)\rangle.\end{aligned}$$

To značí, že funkcia $C(y,w)-\langle w,\hat{x}(y,w^0)\rangle$ nadobúba maximum 0 v bode $w=w^0$, nutnou podmienkou čoho je

$$0=\frac{\partial}{\partial w_i}\left(C(y,w)-\langle w,\hat{x}(y,w^0)\rangle\right)\Big|_{w=w_0}=\frac{\partial C}{\partial w_i}(y,w^0)-\widehat{x_i}(y,w^0). \qquad \square$$

V ďalšom budeme výrobcu spravidla charakterizovať jeho nákladovou funkciou.

1.8 Komparatívna statika podmienenej dopytovej funkcie

Komparatívna statika sa pýta, ako sa mení podmienený dopyt, ak sa zmenia ceny faktorov.

Platí:

$$\begin{aligned}\langle w,\hat{x}(y,w)\rangle &\leq \langle w,\hat{x}(y,w')\rangle \\ \langle w',\hat{x}(y,w)\rangle &\geq \langle w',\hat{x}(y,w')\rangle\end{aligned}$$

z čoho odčítaním dostaneme

$$\langle w'-w,\hat{x}(y,w)\rangle \geq \langle w'-w,\hat{x}(y,w')\rangle,$$

teda

$$\langle w'-w,\hat{x}(y,w')-\hat{x}(y,w)\rangle \leq 0 \tag{1.6}$$

Ak označíme $\Delta w=w'-w, \Delta\hat{x}=\hat{x}(y,w')-\hat{x}(y,w)$, môžeme (1.6) prepísať do tvaru

$$\langle\Delta w,\Delta\hat{x}\rangle \leq 0 \tag{1.7}$$

Ak špeciálne zvolíme $\Delta w_j=0$ pre $j\neq i$, potom (1.7) dáva

$$\Delta w_i\Delta x_i \leq 0.$$

Dopyt po tom-ktorom faktore pri pevnom y teda klesá s rastom jeho ceny.

1.9 Hraničné a priemerné náklady

V ďalšom budeme argument w vo funkcii C vynechávať, ak ho v úvahách budeme považovať za pevne zvolené.

Pre nákladovú funkciu $C(y)$ zavedieme nasledujúce označenia a názvy:

$C(0)$	sú pevné náklady (fixed costs),
$AC(y) = \dfrac{C(y)}{y}$	sú priemerné náklady (AC – average costs)
$MC(y) = C'(y)$	sú hraničné náklady (MC – marginal costs)

Veta 1.4. *Predpokladajme, že nákladová funkcia C je spojite diferencovateľná. Potom*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, y} AC(y) = \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, y}\Big(\frac{C(y)}{y}\Big)\Big) = 0 \text{ pre } y > 0$$

práve vtedy, ak

$$MC(y) = AC(y). \tag{1.8}$$

Inak povedané, priemerné náklady sú v svojom minime rovné hraničným nákladom.

Dôkaz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, y}\Big(\frac{C(y)}{y}\Big) = \frac{1}{y}\Big(C'(y) - \frac{C(y)}{y}\Big) = \tfrac{1}{y}(\mathrm{MC}(y) - \mathrm{AC}(y)) \qquad \square$$

Poznámka. Pevné náklady C(0) sú náklady, ktoré výrobca musí vynaložiť pri akejkoľvek nenulovej výrobe bez ohľadu na jej objem. V úvahách predchádzajúcich odsekov sme od nich abstrahovali Na rozdiel od tohoto odseku totiž v úlohách, ktoré sme v nich riešili nehrali úlohu.

1.10 Maximalizácia zisku

Ako sme už uviedli v odseku 1.4, konečným cieľom racionálne sa správajúcej firmy je maximalizovať zisk, teda hľadať $\hat{X} \in \mathbb{R}^n_+$ také, že

$$\Pi(\hat{X}) = pf(\hat{X}) - \langle w, \hat{X}\rangle \geq pf(x) - \langle w, x\rangle = \Pi(x) \tag{1.9}$$

pre každé x. Ukážeme (intuitívne zrejmú) ekvivalenciu riešenia tejto úlohy s dvojicou na seba nadväzujúcich úloh minimalizácie nákladov pri danom objeme výroby a následnej voľby objemu výroby, pri ktorom sa maximalizuje zisk.

Označme $\hat{y} = \arg\max(py - C(y))$ riešenie druhej z úloh. Platí

$$\begin{aligned} \max_x\{pf(x) - \langle w, x\rangle\} &= \max_{x,y}\{py - \langle w, x\rangle : y = f(x)\} \\ &= \max_y\{py - \min_x\{\langle w, x\rangle : y = f(x)\}\} = \max_y py - C(y) = \hat{y}. \end{aligned}$$

Ak sú $\hat{X}$ a $\hat{x}(y)$ jednoznačne definované, vyplýva z toho aj $\hat{X} = \hat{x}(\hat{y})$.

Označme $\hat{y} = f(\hat{X})$. Platí

$$\begin{aligned} \Pi(\hat{x}(\hat{y})) = pf(\hat{x}(\hat{y})) - \langle w, \hat{x}(\hat{y})\rangle = p\hat{y} - \langle w, (\hat{X})\rangle = \Pi(\hat{X}) \\ py - C(y) = pf(\hat{x}(y) - \langle w, \hat{x}(y)\rangle = \Pi(\hat{x}(y)) \leq \Pi(\hat{X}) \end{aligned}$$

z čoho vyplýva

$$p\hat{y} - C(\hat{y}) = \max\{py - C(y)\}, \tag{1.10}$$

teda $\hat{X} = \hat{x}(\hat{y})$ rieši úlohu (1.9). V tomto zmysle sú úlohy (1.9), (1.10) ekvivalentné.

Ak C je C^1, potom nutnou podmienkou, aby $\hat{y}$ riešilo úlohu

$$p\hat{y} - C(\hat{y}) = \max_y \{py - C(y)\}, \tag{1.9}$$

je

$$C'(\hat{y}) = p \tag{1.10}$$

riešenie a navyše C je ostro konvexná (teda $C'(y)$ je rastúca), potom je riešenie (1.10) jediné a je riešením úlohy (1.10). Existuje teda inverzná funkcia $\hat{y} = (C')^{-1}(p)$. Pretože racionálna funkcia volí objem výroby=ponuku tak, aby maximalizovala svoj zisk, nazývame funkciu $S(p) = (C')^{-1}(p)$ *ponukovou funkciou firmy*. Všimnime si, že S je rastúcou funkciou p.

Ak navyše C je C^2 a platí $\frac{\partial^2 C}{\partial^2 y}(\hat{y}) \neq 0$ potom z vety o implicitnej funkcii vyplýva, že $\hat{y}$ je C^1 funkciou p. Je to **funkcia ponuky firmy**.

Hodnoty $\hat{X}$ a $\hat{y}$ sú samozrejme funkciami cien w, p, platí

$$\hat{X}(w,p) = \hat{x}(\hat{y}(w,p), w);$$

označíme

$$\hat{\Pi}(w,p) = \Pi(\hat{x}(\hat{y}(w,p)), w, p) = p\hat{y}(w,p) - C(\hat{y}(w,p))$$

maximálny zisk, ktorý tak isto závisí od cien.

Všimnime si,že

$$\Pi(\hat{x}(y,w)) = y\left[p - \frac{C(y)}{y}\right]$$

a označme

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}(w,p) &= \Pi(\hat{x}(\hat{y}(w,p)), w, p)\\ \hat{X}(w,p) &= \hat{x}(\hat{y}, w, p)\end{aligned}$$

Z (1.10) vyplýva

$$\hat{\Pi} = p\hat{y} - C(\hat{y}) = \hat{y}(p - C(\hat{y})/\hat{y}) = \hat{y}(MC(\hat{y}) - AC(\hat{y}))$$

To nám umožňuje hodnotu $\hat{\Pi}(w,p)$ graficky vyčítať z Obr. 7 (využijeme 1.8).

Obrázok súčasne znázorňuje, že nulový zisk dosahuje firma pri cene $p^* = MC(y^*) = AC(y^*)$, kde y^* rieši rovnicu (1.8).

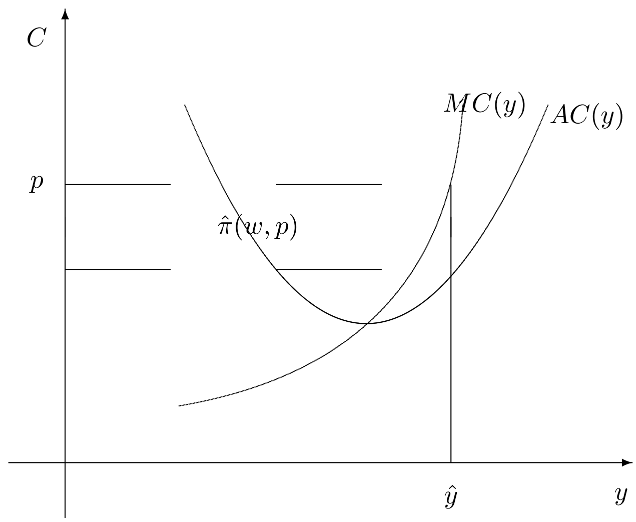
1.11 Hottelingova lemma

Veta 1.5. *Nech $f \in C^2$ a $\hat{X}(w,p)$ je vnútorným bodom $\mathbb{R}^n_+$. Potom platí*

$$\begin{aligned}\hat{y}(w,p) &= \frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial p}(w,p)\\ \hat{X}(w,p) &= -\left[\frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial w}(w,p)\right]^T\end{aligned}$$

Dôkaz. Platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial p}(w,p) &= \frac{\partial}{\partial p}\left[p\hat{y}(w,p) - C(\hat{y}(w,p), w)\right]\\ &= \hat{y}(w,p) + \frac{\partial}{\partial y}\left[py - C(y,w)\right]\Big|_{y=\hat{y}(w,p)} \frac{\partial\hat{y}}{\partial p}(w,p)\end{aligned}$$



Obr. 7. Grafické znázornenie maximálneho zisku.

Podľa (1.10) je však hranatá zátvorka nulová, čo dokazuje prvú časť Vety.

Ďalej platí

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\Pi}}{\partial w_i}(w,p) &= \frac{\partial}{\partial w_i}\left[p\hat{y}(w,p) - C(\hat{y}(w,p),w)\right]\\ &= -\frac{\partial C}{\partial w_i}(\hat{y}(w,p),w) + \frac{\partial}{\partial y}\left[py - C(y,w)\right]\Big|_{y=\hat{y}(w,p)}\frac{\partial\hat{y}}{\partial w_i}(w,p)\\ &= -\frac{\partial C}{\partial w_i}(\hat{y}(w,p),w) = -\hat{X}_i(w,p)\end{aligned}$$

podľa Shepardovej lemmy (Veta 1.3, bod 6) □

1.12 Vlastnosti funkcie ponuky a funkcie dopytu firmy – komparatívna statika

Veta 1.6.

1: $\hat{\Pi}$ *je konvexná vo* w *aj* p.

2: $\hat{y}$ *neklesá s* p *a rastie s* p *ak je* C *ostro konvexná.*

3: $\widehat{X}_i$ *klesá s* w_i.

4: $\hat{\Pi}$ *je homogénna stupňa* 1 *vo* (w,p).

Dôkaz

1. konvexnosť vo w sa dokazuje rovnako ako konkávnosť C vo w. Dokážeme konvexnosť v p. Pre každé y platí

$$\hat{\Pi}(p_1) = p_1\widehat{y_1} - C(\widehat{y_1}) \geq p_1 y - C(y)$$
$$\hat{\Pi}(p_2) = p_2\widehat{y_2} - C(\widehat{y_2}) \geq p_2 y - C(y)$$

Ak $0 \leq \alpha \leq 1$, platí pre každé y

$$\alpha\hat{\Pi}(p_1) + (1-\alpha)\hat{\Pi}(p_2) \geq [\alpha p_1 + (1-\alpha)p_2]y - C(y)$$

a teda aj

$$\alpha\hat{\Pi}(p_1) + (1-\alpha)\hat{\Pi}(p_2) \geq \max_y\{[\alpha p_1 + (1-\alpha)p_2]y - C(y)\} = \hat{\Pi}(\alpha p_1 + (1-\alpha)p_2)$$

2. Podľa 1. platí

$$\frac{\partial \hat{y}}{\partial p} = \frac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial p^2} \geq 0$$

Ak je C ostro konvexná, C' ostro rastie, preto je ostrý rast $\hat{y}$ v p dôsledkom vzťahu (1.10).
3. Podľa 1. platí

$$\frac{\partial \widehat{X}_i}{\partial w_i} = -\frac{\partial^2 \hat{\Pi}}{\partial w_i^2} \leq 0$$

(pretože nutná podmienka ku konvexnosti C^2 funkcie je kladná semidefinitnosť Hessovej matice, čoho zase nutnou podmienkou je nezápornosť jej diagonálnych prvkov). □

Racionálna firma maximalizuje zisk, preto vyrába (a dodáva na trh) objem $\hat{y}$ svojho produktu. Preto funkciu $S(p) = \hat{y}(p)$ nazývame **ponukovou funkciou firmy**. Podľa tvrdenia 2 Vety je S rastúcou funkciou. Ak je C diferencovateľná, platí podľa (1.10)

$$C'(S(p)) = p;$$

ak má C' inverznú funkciu (čo platí napríklad ak je C ostro konvexná), potom

$$S(p) = (C')^{-1}(p).$$

Príklad (Dotácie farmárov v USA)**.** [2]
Dotácie poľnohospodárom kvária rozpočty krajín EÚ i USA. Vládne dotácie farmárov v USA predstavovali \$40-60 miliárd ročne. Čas od času vznikajú tendencie odbúrať ich, teda znížiť nadmernú produkciu a záťaž verejných financií.

Farmári lobujú proti týmto snahám tvrdením, že tým by sa výroba a teda aj poľohospodárska nadprodukci v USA iba zvýšila, pretože farmári by sa snažili udržať svoje príjmy a tým aj životnú úroveň.

Táto úvaha by mohla mať svoje opodstatnenie vtedy, ak by sa jednalo o drobných farmárov. V USA však prevážna väčšina poľnohospodárskej produkcie pochádza od veľkých poľnohospodárskych výrobcov, ktorí sa správajú ako firmy. Úvaha odporuje mikroekonomickej teórii, podľa ktorej sa firma snaží maximalizovať zisk a teda podľa 11.2 by pri poklese p musel poklesnúť aj objem výroby. Výroba by navyše mohla poklesnúť aj tým, že by sa časť fariem stala neefektívnymi a farmárenie by opustili.

1.13 Cvičenia

1.1. Dokážte podrobne konkávnosť f a tvrdenia **f2–f4** z Vety 1.1.

1.2. Zistite pre aké hodnoty exponentov spĺňajú Cobbova-Douglasova funkcia a funkcia konštantnej elasticity axiómy **f1–f3**.

1.3. Firma vyrába produkt y pri vstupoch x_1, x_2. Podľa záznamov vyrobila $y = a$ pri $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ a $y = b$ pri $x_1 = 2$ a
$x_2 = 1$. Ak jej produkčná funkcia spĺňa **f1-f3**, čo môžete povedať o hodnotách produkčnej funkcie pre $x_1 = x_2 = 1.5$ a pre $x_1 = x_2 = 2$?

1.4. Pre produkčnú funkciu spĺňajúcu podmienky **f1–f3** z odseku 1.1 platí $f(0,4) = 1$ a $f(4,0) = 2$. Čo môžete povedať o hodnotách $f(2,2)$ a $f(1,1)$ a ich vzájomnom vzťahu?

1.5. Nech produkčná funkcia f spĺňa **f1-f3**. Dokážte:
a) pre každé c_0 je $J_{c_0} = \bigcup_{c \geq c_0} I_c \subset \mathbb{R}^n_+$ konvexná množina a pre $c_0 > 0$ platí $0 \notin J_{c_0}$,
b) ak $x, \tilde{x} \in I_c$, $\frac{\partial f}{\partial x_i(x)} \neq 0$ a $\tilde{x}_{-i} \geq x_{-i}$, potom $\tilde{x}_i \leq x_i$,

c) ak $n = 2$, $I_c : x_2 = \varphi_c(x_1)$ je hladká izokvanta, potom $\varphi_c(x_1)$ je nerastúca a konvexná v x_1 a neklesajúca v c.
d) Ak je produkčná funkcia ostro monotónna, tak je φ_c odtro klesajúca.

1.6. (podľa [1]) Predpokladajme, že určitá technológia kombinuje dva výrobné faktory A a B v pomere 2 : 3 (teda na jednotku výstupu sa spotrebúvajú dve jednotky vstupu A a tri jednotky vstupu B). Napíšte jej produkčnú funkciu.

1.7. Predpokladajme, že určitá technológia využíva dva výrobné faktory A a B (napríklad dve zariadenia) tak, že s využitím faktora A možno vyrobiť za časovú jednotku tri jednotky výstupu a s využitím faktora B možno vyrobiť za časovú jednotku jednu jednotku výstupu. Napíšte jej produkčnú funkciu.

1.8. Predpokladajme, že produkčná funkcia má tvar:

$$q = f(x_1, x_2) = \min\{ax_1, bx_2\}$$

kde a, b sú kladné konštanty. Vykazuje táto produkčná funkcia konštantné, rastúce alebo klesajúce výnosy z rozsahu?

1.9. Nech f je produkčná funkcia, spĺňajúca $f(0,1) = 1$, $f(1,1) = 1$. Môže byť f Leontieffovou produkčnou funkciou (t. j. produkčnou funkciou komplementárnych faktorov)? Ak áno, zdôvodnite prečo, ak nie, ktorú hodnotu a ako treba zmeniť, aby ňou mohla byť?

1.10. Na výrobu 1 kg halušiek sa spotrebuje a jednotiek elektriny na pohon miešadla. Na ohrev vody, v ktorej sa varia, možno je treba b jednotiek elektriny alebo c jednotiek plynu, plyn a elektrinu možno v ľubovoľnom pomere kombinovať. Napíšte produkčnú funkciu a načrtnite jej izokvanty.

1.11. Nech f je C^1, $\hat{x}$ maximalizuje zisk π a $\hat{x}_i = 0$. V akom vzťahu je $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\hat{x})$ voči w_i? [Návod: poraďte sa s pánmi Kuhnom a Tuckerom.]

1.12. Za akých podmienok podmienok sa dosahuje maximum zisku v jedinom bode? Za akých podmienok sa minimu nákladov pri danej úrovni výroby dosahuje v jedinom bode?

1.13. Nech produkčná funkcia firmy má tvar:

$$Q = 50L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{2}}$$

kde L označuje vstup práce a K označuje vstup kapitálu.
a) Určite pomer medzi prácou a kapitálom, pri ktorom sa minimalizujú náklady na každý zadaný objem výstupu, ak cena práce je 300,– Sk za hodinu práce a cena kapitálu je 600,– Sk za strojovú hodinu.
b) Určite hodnoty faktorov, ktoré minimalizujú náklady pre úroveň 400 jednotiek produktu.
c) Predpokladajme, že cena produktu je 30,– Sk za jednotku. Bude objem produktu, pri ktorom sa maximalizuje zisk, menší, rovný alebo väčší ako 400 jednotiek?

1.14. Produkčná funkcia výrobcu je daná formulou

$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 + 1} \cdot \sqrt{x_2 + 2} - 2, \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Nájdite podmienený dopyt po faktoroch x_1, x_2 pri úrovni výroby $f(x_1, x_2) = 1$.

1.15. Pre produkčnú funkciu

$$f(x_1, x_2) = (1 + x_1)(1 + x_2) - 1$$

a daných cenách faktorov w_1, w_2 vypočítajte podmienenú dopytovú funkciu $\hat{x}$.

1.16. Produkčná funkcia výrobcu je

$$f(x_1, x_2) = \min\{x_1 + x_2, 3x_1, 3x_2\}.$$

a) Interpretujte ju ekonomicky.
b) Určite podmienený dopyt po faktoroch a nákladovú funkciu.

1.17. Ak firma produkuje v bode, v ktorom $\frac{1}{w_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) > \frac{1}{w_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)$, čo môže urobiť, aby zmenšila náklady a zachovala výrobu?

1.18. Vypočítajte nákladovú funkciu pre úlohy 1–3 odseku 1.6textu.

1.19. (podľa [1]) Roľník s dostatočnou výmerou pôdy pestuje kukuricu. Predpokladajme, že jeho nákladová funkcia je

$$C(q) = q^2/10 + 10000,$$

kde q je počet ton vypestovanej kukurice. Cena tony kukurice je 250 Sk.
a) Aký optimálny objem výroby zvolí roľník, maximalizujúci zisk?
b) Aké celkové náklady na tonu a zisk dosiahne roľník pri optimálnom objeme výroby?
c) Aký vplyv bude mať na rozhodovanie o optimálnom objeme výroby pokles ceny kukurice o 10 Sk na tonu?
d) Vyjadrite závislosť medzi optimálnym objemom výroby a cenou. Pri akej úrovni ceny prestane výroba byť ziskovou?

1.20. (podľa [1]) Výrobca pánskych košieľ vyrába pre stálych zákazníkov mesačne 50000 košieľ s nasledovnými nákladmi:
a) materiál 3.750.000 Sk
b) práca 2.550.000 Sk
c) réžia 450.000 Sk
d) odpisy 4.650.000 Sk
Spolu 11.400.000 Sk
Výrobné zariadenie mu umožňuje rozšíriť výrobu o ďalších 20000 kusov bez potreby investovať do zariadenia. Nemusí ani zvyšovať počet zamestnancov, podľa kolektívnej zmluvy iba doplatí za každú košeľu, vyrobenú nad doterajšiu úroveň výroby príplatok 25 Sk k doterajšej mzde. Nový zákazník ponúka objednávku ďalších 10000 košieľ po 150 Sk za košeľu. Prijme racionálny výrobca zákazku?

1.21. Dokážte, že ak produkčná funkcia spĺňa **f1–f3**, potom v úlohe 1.5 minimalizácie nákladov sa minimum pri podmienke $f(x) \geq y$ dosahuje v bode, v ktorom $f(x) = y$.

1.22. Ako sa zmení tvrdenie Shepardovej lemy, ak $\hat{x}$ je hraničný bod $\mathbb{R}^n_+$?

1.23. Predpokladajme, že firma používa dokonale zameniteľné faktory. Ak je cena faktorov rovnaká, ako vyzerajú podmienené dopytové funkcie po jednotlivých faktoroch?

1.24. Dokážte, že maximálny zisk $\hat{\pi}$ je konvexnou funkciou w.
[Návod: postupujte ako pri dôkaze konkávnosti C vzhľadom na w.]

1.25. V úlohe 1.19 načrtnite vo vhodných jednotkách v okolí optimálneho objemu výroby priebeh priemerných nákladov $AC(y)$, hraničných nákladov $MC(y)$ a graficky vyznačte veľkosť optimálneho zisku.

1.26. Rozveďte podrobne, v akom zmysle sú úlohy

$$py - C(y) \to \max \quad \text{a} \quad pf(x) - \langle w, x\rangle \to \max$$

ekvivalentné a dokážte túto ekvivalenciu.

1.27. Pre produkčnú funkciu $f(x)$ technická miera substitúcie je definovaná ako

$$TRS_{ij}(x) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)}.$$

a) Spočítajte TRS_{12}^{CES} pre CES funkciu $f(x_1, x_2) = (ax_1^\rho + bx_2^\rho)^{\frac{1}{\rho}}$.
b) Spočítajte TRS_{12}^{CD} pre Cobb-Douglasovu funkciu $f(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$.

c) Ukážte, že $\lim_{\rho\to 0} TRS_{12}^{CES} = TRS_{12}^{CD}$.
d) Čomu sa rovná $\lim_{\rho\to -\infty} TRS_{12}^{CES}$? Ako to súvisí s Leontieffovou produkčnou funkciou?

1.28. Daná je produkčná funkcia

$$f(x_1, x_2) = \min\{2x_1 + x_2, 3x_1\}.$$

a) Pre túto fukciu nakreslite izokvanty I_1, I_2, I_3.
b) Nájdite nákladovú funkciu $C(y)$.

1.29. Príklad 25 zo skrípt. (Pozri aj obrázok 7 v skriptách. Príslušné nákladové funkcie sú:
Cobb-Douglasova funkcia:

$$C(y) = \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{b}{a+b}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{a}{a+b}} \right), \qquad w_1^{\frac{a}{a+b}} w_2^{\frac{b}{a+b}} y^{\frac{1}{a+b}}.$$

Funkcia dokonale zameniteľných faktorov:

$$C(y) = \begin{cases} \frac{w_1 y}{a} & \text{ak } \frac{w_1}{w_2} \leq \frac{a}{b} \\ \frac{w_2 y}{b} & \text{ak } \frac{w_1}{w_2} \geq \frac{a}{b} \end{cases}.$$

Leontieffova funkcia:

$$C(y) = y\left(\frac{w_1}{a} + \frac{w_2}{b}\right).$$

Môžete zvoliť $a = b = 1/2$.

2 Spotrebiteľ

2.1 Preferencie a funkcia užitočnosti

Čo je racionálne rozhodovanie spotrebiteľa nie je tak jednoznačne zrejmé ako u firmy a trvalo určitý čas, kým sa to podarilo kvantifikovať. Predmetom rozhodovania spotrebiteľa je spotreba rozličných *statkov (komodít, goods)*. Statkom môže byť napr. klobása, borovička, ako aj návšteva kultúrneho podujatia, hodina aerobicu, či jednoducho voľný čas. Súbor statkov nazveme *košom* (bundle). Počet statkov nech je n, x_i nech je množstvo statku, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ označíme ich vektor (kôš), množinu košov označíme X.

Vychádzame z toho, že spotrebiteľ preferuje niektoré koše pred inými, napríklad preferuje kôš, pozostávajúci zo štvrť kila klobásy a dvoch deci vína pred košom, pozostávajúcim zo samotného polkila klobásy.

Pre koše statkov zavedieme označenia:

- $x \prec \tilde{x}$ značí, že $\tilde{x}$ *preferujeme* pred x.
- $x \preceq \tilde{x}$ značí $\tilde{x} \not\prec x$, t. j. že x nepreferujeme pred $\tilde{x}$ (alebo, ako budeme hovoriť, $\tilde{x}$ *preferujeme slabo* pred x); všimnime si, že $x \prec \tilde{x}$ značí $x \preceq \tilde{x}, \tilde{x} \not\preceq x$.
- Ak $x \preceq x'$ a $x' \preceq x$, píšeme $x \sim x'$ a hovoríme, že spotrebiteľ je ku košom x, x' *indiferentný*.

Od preferencie budeme požadovať, aby spĺňala nasledujúce axiómy:

P1: $\preceq$ je tranzitívna a reflexívna relácia, t. j. z $x \preceq \tilde{x},\ \tilde{x} \preceq \tilde{\tilde{x}}$ vyplýva $x \preceq \tilde{\tilde{x}}$.

P2: Alebo $\hat{x} \preceq x$, alebo $x \preceq \hat{x}$.

P3: Ak $x \leq \tilde{x}$, potom $x \preceq \tilde{x}$.

P4: Množiny $\{x' : x' \preceq x\}$ a $\{x' : x' \succeq x\}$ sú uzavreté a druhá z nich je konvexná.
Hovoríme, že preferencie sú *ostro monotónne*, ak spĺňajú ďalšiu axiómu

P5: Z $x'_i > x_i$ pre všetky $i = 1, \ldots, n$ vyplýva $x' \succ x$.

Kým **P1, P3** sú prirodzené, uzavretosť v **P4** je čisto technicky matematický predpoklad. Konvexnosť v **P4** vyplýva z nasledujúcej úvahy: Ak spotrebiteľ preferuje kôš x' pred košom x, tak pred košom x preferuje aj kombinované koše $\alpha x + (1-\alpha)x'$ pre $0 \leq \alpha \leq 1$. Aby sme zjednodušili výklad, oslabili sme mierne definíciu ostrej monotónnosti **P5**. V literatúre sa namiesto $x'_i > x_i$ predpokladá (analogicky k definícii ostrej monotónnosti produkčnej funkcie v 1.2) $x' \geq x,\ x' \neq x$.

Všimnime si, že, ak $u\colon X \to \mathbb{R}$ je kvázikonkávna funkcia taká, že $u(x') \geq u(x)$ ak $x' \geq x$, potom relácia $\succeq$, definovaná vzťahom

$$x' \succeq x \text{ ak } u(x') \geq u(x)$$

je preferencia; hovoríme že preferencia je *generovaná* funkciou u. Platí

Veta 2.1. *Nech $\preceq$ je ostro monotónna preferencia na $X = \mathbb{R}^n_+$. Potom existuje spojitá nezáporná kvázikonkávna funkcia u, ktorá ju generuje.*

Dôkaz. Označíme $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n_+$ vektor $(1, \dots, 1)$ a definujeme

$$\begin{aligned} u(\mathbf{1}) &= 1 \\ u(c\mathbf{1}) &= c \qquad \text{pre } c \geq \ 0,\ u(x) = c \ \text{ ak } x \sim c\mathbf{1} \end{aligned}$$

Vzhľadom na **P4** je $u(c\mathbf{1})$ spojitá (prečo) a vzhľadom na **P5** aj ostro rastúca funkcia c. Ukážeme, že $u(x)$ je jednoznačne definované pre každé $x \in \mathbb{R}^n_+$.

Označme $\underline{C} = \{c : c\mathbf{1} \preceq x\}$, $\overline{C} = \{c : c\mathbf{1} \succeq x\}$. Platí $0 \in \underline{C}$, $\max_i x_i \in \overline{C}$, preto $\underline{C}$ aj $\overline{C}$ sú $\neq \emptyset$. Ďalej, podľa **P4** sú $\underline{C}$ aj $\overline{C}$ sú uzavreté a platí $\underline{C} \cup \overline{C} = [0, \infty)$. Z toho vyplýva, že $\underline{C} \cap \overline{C} \neq \emptyset$, existuje preto $c_x \in \underline{C} \cap \overline{C}$, teda $c_x\mathbf{1} \sim x$. Môžeme teda definovať $u(x) = c_x$.

Ukážeme teraz, že c_x je jednoznačne definované. Inak by totiž existovali $c_1 < c_2$ (a teda $c_1\mathbf{1} \prec c_2\mathbf{1}$) také, že súčasne $c_1\mathbf{1} \sim x \sim c_2\mathbf{1}$, čo je v spore.

Ďalej ukážeme, že u naozaj generuje preferencie, teda, že $x \preceq \tilde{x}$ práve vtedy, ak $u(x) \leq u(\tilde{x})$. Nech $x \preceq \tilde{x}$, platí $u(x)\mathbf{1} \preceq x \preceq \tilde{x} \prec u(\tilde{x})\mathbf{1}$, teda $u(x)\mathbf{1} \preceq u(\tilde{x})\mathbf{1}$, čo je ekvivalentné $u(x) \leq u(\tilde{x})$. Naopak, ak $u(x) \leq u(\tilde{x})$, vtedy $u(x)\mathbf{1} \preceq u(\tilde{x})\mathbf{1}$ a $x \sim u(x)\mathbf{1} \preceq u(\tilde{x})\mathbf{1} \sim \tilde{x}$.

Nezápornosť funkcie u je zrejmá, dokážeme jej spojitosť, teda že pre každé $a < b$ je $u^{-1}(a, b)$ otvorená množina. Platí však

$$u^{-1}(a, b) = X \setminus \big(\big[u^{-1}(-\infty, a] \cup u^{-1}[b, \infty)\big]\big)$$

a teda stačí dokázať, že $u^{-1}(-\infty, a]$ a $u^{-1}[b, \infty)$ sú uzavreté. Pretože u generuje $\preceq$, platí

$$u^{-1}(-\infty, a] = \{x : x \preceq a\mathbf{1}\}$$

a množina $\{x : x \preceq a\mathbf{1}\}$ je uzavretá podľa **P4**; analogicky pre $[b, \infty)$. Kvázikonkávnosť značí, že množiny $W_c = x \colon u(x) \geq c$ sú konvexné, čo je bezprostredným dôsledkom predpokladu **P4** □

Funkciu u nazývame *funkciou užitočnosti (utility function)* preferencie $\preceq$. Hoci by sa v teórii spotrebiteľa dalo pracovať s preferenciami, zaužívalo sa pracovať s funkciou užitočnosti, pretože je to pohodlnejšie a názornejšie. V budúcnosti bude teda pre nás spotrebiteľ charakterizovaný funkciou užitočnosti. V súlade s Vetou budeme od funkcie užitočnosti požadovať, aby mala nasledovné vlastnosti:

U1: u je spojitá a kvázikonkávna (t. j. množiny $\{x : u(x) \geq c\}$ sú konvexné) pre každé c.

U2: $u(x') \geq u(x)$, ak $x' \geq x$.

Ďalej budeme hovoriť, že u je ostro monotónna, ak spĺňa

U3: $u(x) > u(x)$, ak $x_i > x_i$ pre všetky $i = 1, \dots, n$.

Poznámky.

1. Funkcia užitočnosti daných preferencií nie je definovaná jednoznačne: ak h je ľubovoľná ostro rastúca funkcia, potom funkcia u a $h \circ u$ generujú tú istú preferenciu. Hovoríme, že funkcia užitočnosti má *ordinálny charakter.*

2. Naša definícia ostrej monotónnosti sa mierne odlišuje o zaužívanej, ktorá prepokladá $x' \geq x$, $x' \neq x$ namiesto $x_i > x_i$ pre všetky $i = 1, \dots, n$.

2.2 Hladiny indiferentnosti

Nech $c \geq 0$ a nech $u(x^*) = c$. Množinu $V_c = \{x : u(x) = c\} = \{x : x \sim x^*\}$ nazývame *hladinou indiferentnosti* (voči x). Hladina indiferentnosti zodpovedá izokvante v teórii firmy s funkciou užitočnosti na mieste produkčnej funkcie.

Všimnime si, že pri odvodzovaní vlastností izokvánt sme z konkávnosti produkčnej funkcie využili iba to, že je kvázikonkávna a preto hladiny indiferentnosti majú rovnaké geometrické vlastnosti ako izokvanty.

Technickej miere substitúcie zodpovedá u plôch indiferentnosti *hraničná miera substitúcie* (marginal rate of substitution)

$$(MRS)_{ij} = -\frac{\partial x_j}{\partial x_i}(x)\bigg|_{u=c} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)}{\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)}$$

Analogicky ako pre izokvantu zavádza sa *elasticita substitúcie*

$$e_{ij}(x) = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x_j}{x_i}\right)}{\mathrm{d}(MRS_{ij})}\frac{MRS_{ij}}{\frac{x_j}{x_i}}.$$

2.3 Rovnováha spotrebiteľa

Za *racionálne správanie* spotrebiteľa považujeme, že si v rámci svojich možností zvolí kôš statkov ktorý preferuje (slabo) voči ostatným. V reči funkcii užitočnosti to značí, že maximalizuje jej hodnotu. Jeho *možnosti* sú dané jeho *príjmom* a cenami jednotlivých statkov.

Označíme $p = (p_1, \dots, p_n)$ vektor cien statkov koša, I (income) veľkosť príjmu spotrebiteľa. Potom racionálne sa správajúci spotrebiteľ rieši nasledovnú úlohu:

Spomedzi košov statkov x, spĺňajúcich podmienku

$$\langle p, x\rangle \le I \tag{2.1}$$

(spotrebiteľ za statky nevydáva viac, než je jeho príjem) nájsť kôš $x = \hat{x}(p, I)$ taký, že

$$u(\hat{x}) \ge u(x) \tag{2.2}$$

pre všetky x, spĺňajúce (2.1).

Kôš riešiaci túto úlohu je *rovnovážny* – spotrebiteľ nemá dôvod ho meniť.

Ako v prípade rovnováhy firmy môžeme úlohu ekvivalentne nahradiť úlohou v ktorej nerovnosť v podmienke (2.1) nahradíme rovnosťou

$$\langle p, x\rangle = I \tag{2.3}$$

v tom zmysle, že ak má úloha s nerovnosťou riešenie, potom má aj úloha s rovnosťou riešenie s rovnakou hodnotou funkcie užitočnosti (dôkaz ako cvičenie).

Ak $u \in C^1$ a $\hat{x} \in \operatorname{int} \mathbb{R}^n_+$ je riešením úlohy (2.2), (2.3), potom podľa Lagrangeovej vety platí

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(\hat{x}) = \lambda p_i, \qquad i = 1, \dots, n \tag{2.4}$$

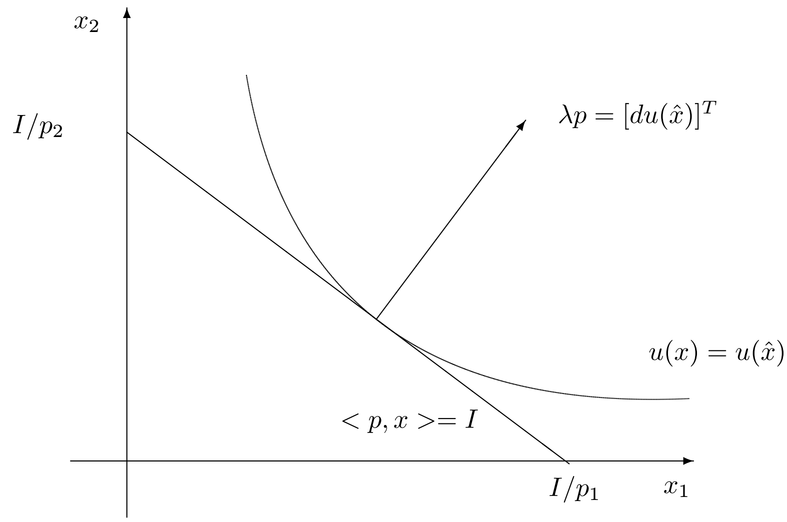
alebo ekvivalentne

$$[\mathrm{d}\, u(\hat{x})]^T = \lambda p \tag{2.5}$$

čo môžeme zapísať v tvare

$$(MRS)_{ij} = \frac{p_i}{p_j}.$$

Inak môžeme (2.4) formulovať tak, že hraničné zmeny funkcie užitočnosti sú úmerné cenám statkov. Geometricky znamená (2.4), že normála k hladine indiferentnosti funkcie užitočnosti je kolineárna s normálou k *rozpočtovej rovine* (2.3) (obr. 8).



Obr. 8. Rovnováha spotrebiteľa.

Ak je u C^2 a jej Hessova matica je záporne definitná, tak je rovnováha $\hat{x}$ jednoznačne definovaná a je C^1 funkciou p a I:

$$\hat{x} = m(p, I).$$

Funkciou m nazývame *Marshallovskou dopytovou funkciou.*

2.4 Priama a nepriama daň

Cieľom daní je získať od obyvateľstva prostriedky na všeobecne prospešné výdavky. Vrchnosť ich môže získať tak, že zdaní príjem (priama daň), alebo zdaní určitý statok spotrebnou daňou. Ktorá alternatíva je pre spotrebiteľa výhodnejšia?

Pri priamej dani sa rozpočtové ohraničenie (2.3) zmení na

$$\langle p, x \rangle = (1 - \tau)I$$

kde τ je daň z príjmu, pri spotrebnej dani na statok i so sadzbou t_i sa cena p_i zmení pre spotrebiteľa na $p_i + t_i$. Aby sa príjem vrchnosti pri obidvoch typoch daní pri koši statkov x rovnal, musí platiť

$$\langle t, x \rangle = \tau I. \tag{2.6}$$

Pri nepriamej dani si spotrebiteľ zvolí kôš statkov x tak, aby riešil úlohu (2.2), (2.3) pri p zamenenom za $p + t$, teda volí

$$x_t = m(p + t, I)$$

v dôsledku čoho sa sa (2.6) prepíše na

$$\tau I = \langle t, m(p + t, I) \rangle \qquad (= \langle t, x_t \rangle) \tag{2.7}$$

Pri priamej dani si spotrebiteľ vzhľadom na (2.7) volí kôš statkov

$$\hat{x}_\tau = m(p, (1 - \tau)I)$$

tak, že

$$\begin{aligned} u(\hat{x}_\tau) &= \max_x \{u(x) : \langle p, x \rangle = (1 - \tau)I\} \\ &= \max_x \{u(x) : \langle p, x \rangle = I - \langle t, x_t \rangle\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Platí

$$I = \langle p+t, x_t\rangle = \langle p, x_t\rangle + \langle t, x_t\rangle = \langle p, x_t\rangle + \tau I,$$

teda

$$\langle p, x_t\rangle = (1-\tau)I.$$

To značí, že x_t spĺňa rovnaké rozpočtové ohraničenie ako $\tilde{x}_\tau$. Keďže $\tilde{x}_\tau$ je riešenie úlohy (2.8) s I zameneným za $(1-\tau)I$, platí

$$u(\hat{x}_\tau) \geq u(x_t).$$

Z hľadiska preferencií, generovaných funkciou užitočnosti je teda priama daň pre spotrebiteľa milosrdnejšia než nepriama.

Prečo sa teda napriek tomu spotrebné dane predsa len uplatňujú? Príčiny sú jednak technické, jednak vecné. Podobne ako v prípade DPH jej výber spotrebnej dane spoľahlivejší ako výber dane z príjmu. Na druhej strane môže spotrebnou daňou vrchnosť zdaňovať adresne tých daňovníkov, v prospech ktorých príjem z daní využije (napríklad príjem zo spotrebnej dane na motorové palivá na stavbu ciest) Alebo sa môže snažiť zdanením niektorých statkov zamedziť ich nežiadúcej spotrebe (alkohol, cigarety).

2.5 Nepriama užitočnosť a výdavková funkcia

Ak zameníme funkciu užitočnosti funkciou produkčnou a ceny statkov cenami faktorov, je úloha (2.2), (2.3) na rovnováhu spotrebiteľa analogická združenej úlohe minimalizácie nákladov firmy pri danom objeme výroby z odseku 1.5. Aj táto združená úloha má v teórii firmy interpretáciu – maximalizáciu objemu výroby pri daných nákladoch. Rovnako má interpretáciu združená úloha k úlohe spotrebiteľa minimalizovať náklady na danú úroveň užitočnosti:

Dané je U, spomedzi bodov $x \in \mathbb{R}^n_+$, spĺňajúcich

$$u(x) \geq U \tag{2.9}$$

hľadáme bod $x = \hat{x}$ taký, že pre všetky x, spĺňajúce (2.9) platí

$$\langle p, \hat{x}\rangle \leq \langle p, x\rangle. \tag{2.10}$$

Platí

Veta 2.2. *Za predpokladu* **U3** *ostrej monotónosti funkcie u je $\hat{x}$ riešením úlohy* (2.1), (2.2) *práve vtedy, ak je riešením pridruženej úlohy* (2.9), (2.10) *pre $U = u(\hat{x})$.*

Dôkaz vety je priamočiary a ponechávame ho na čitateľa. Z vety vyplýva, že za jej predpokladov má úloha (2.9), (2.10) jediné riešenie, ktoré je C^1 funkciou p, U za rovnakých podmienok ako pri úlohe (2.1), (2.2) resp. (2.2), (2.3). Funkciou $\hat{x} = h(p, U)$ nazývame *kompenzovanou (Hicksovskou) dopytovou funkciou.* Ďalej zavedieme funkcie

$$V(p, I) = u(m(p, I)) \tag{2.11}$$

(*nepriama funkcia užitočnosti*) a

$$C(p, U) = \langle p, h(p, U)\rangle \tag{2.12}$$

(*výdavková funkcia*). Za predpokladov Vety 2.2 platí vzhľadom na to, že úlohy (2.1), (2.2) a (2.9), (2.10) sú pridružené

$$m(p, I) = h(p, u(m(p, I))) = h(p, V(p, I)) \tag{2.13}$$

$$h(p, U) = m(p, \langle p, h(p, U)\rangle) = m(p, C(p, U)) \tag{2.14}$$

$$U = V(p, C(p, U)). \tag{2.15}$$

Poznámky.

1. Kým Marshalovskú funkciu môžeme považovať za v princípe pozorovateľnú, Hicksovskú nie.
2. Výdavková funkcia zodpovedá nákladovej v teórii firmy.

Z Poznámky 2 a odseku 1.6 vyplýva nasledovný

Dôsledok. *C je konkávna v p a ak je C^1, podľa Shepardovej lemmy (Veta 1.3, bod 6) platí*

$$\frac{\partial C}{\partial p_i}(p,U) = h_i(p,U). \tag{2.16}$$

Derivovaním (2.15) *podľa p_i a použitím* (2.16) *ďalej dostaneme*

$$0 = \frac{\partial V}{\partial p_i} + \frac{\partial V}{\partial I}\frac{\partial C}{\partial p_i} = \frac{\partial V}{\partial p_i} + \frac{\partial V}{\partial I}m,$$

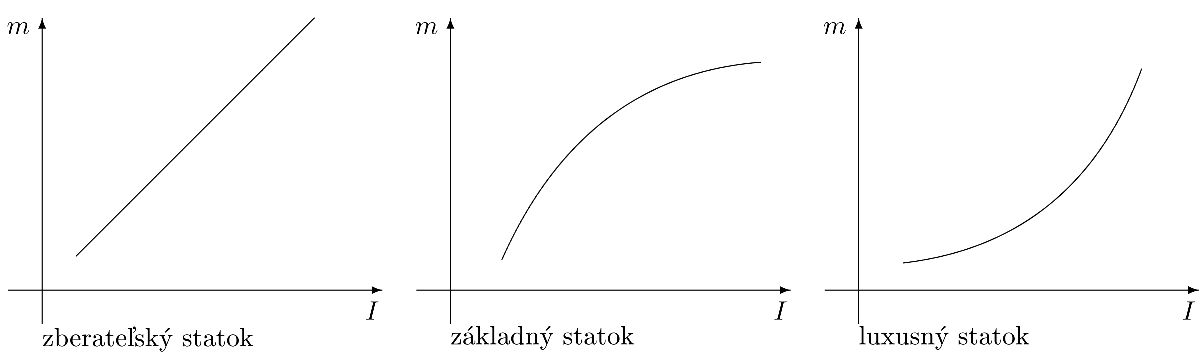
z čoho vyplýva

$$m(p,I) = -\frac{\partial V}{\partial p_i}(p,I)/\frac{\partial V}{\partial I}(p,I)$$

Royova lemma

2.6 Komparatívna statika spotrebiteľa

Zmenu Marshallovského dopytu pri zmene objemu príjmu charakterizujú tzv. Engelove krivky.



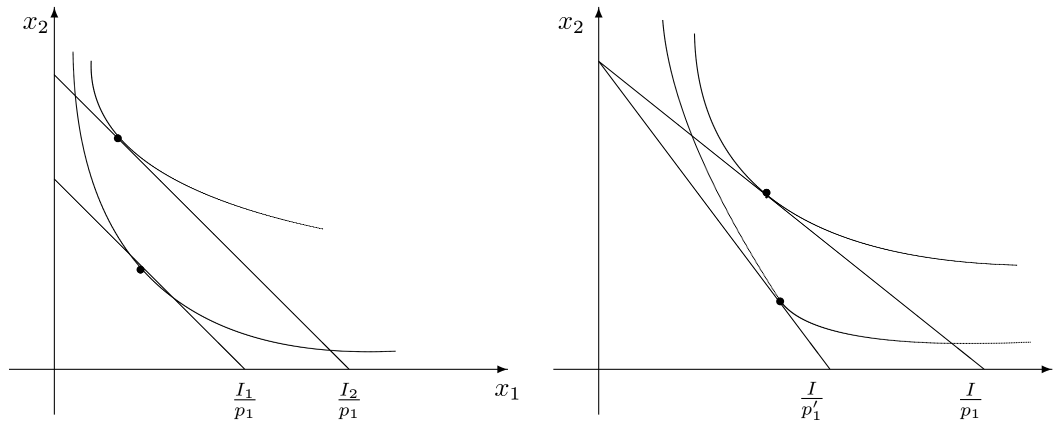
Obr. 9. Engelove krivky.

Z odseku 1.7 a poznámky 2 odseku 2.5 vyplýva, že pre Hicksovský dopyt pri zmene vektoru cien platí $\langle \triangle p, \triangle x\rangle \le 0$ a teda je Hicksovský dopyt po tom-ktorom statku klesajúcou funkciou jeho ceny.

Ako ukazujú príklady, Marshallovský dopyt pri statku nemusí byť rastúcou funkciou príjmu, ani klesajúcou funkciou ceny.

Statky, ktorých spotreba rastie s príjmom a klesá s cenou, nazývame *normálnymi* statkami. Statok, Marshallovský dopyt po ktorom klesá s rastom príjmu nazývame *podradným*; statok, dopyt po ktorom klesá s poklesom jeho ceny nazývame *Giffenovým*.

Príkladom Giffenovho tovaru môžu byť napríklad zemiaky pre obyvateľstvo, pre ktoré tvorí podstatnú časť potravy: ak ich cena klesne, zostáva viac prostriedkov na nákup drahšej potravy.



$I_1 < I_2,\ m_1(p, I_1) > m_1(p, I_2)$
podradný statok

$p_1 < p_1',\ m_1(p', I) > m_1(p.I)$
Giffenov statok

Obr. 10. Podradný a Giffenov statok.

2.7 Výpočet dopytových funkcií

Hodnotami Marshallovskej a Hicksovskej dopytovej funkcie sú riešenia úloh (2.1), (2.2) resp. (2.8),(2.9). Vzhľadom na analógiu s úlohou rovnováhy firmy z odseku 1.5 platí to, čo sme povedali v odseku 1.6: na výpočet riešenia síce možno pre niektoré funkcie užitočnosti výhodne použiť metódu Lagrangeových multiplikátorov (rovnice (2.4), (2.5) pre Marshallovskú funkciu), širšie uplatnenie však má postup eliminácie premenných z ohraničenia $\langle p, x\rangle = I$ resp. $u(x) = U$ a následneho riešenia úlohy na voľný extrém. Ak poznáme jednu z dopytových funkcií, môžeme druhú z nich vypočítať z rovnice (2.12) resp. (2.13).

2.8 Sluckého identita

Predpokladajme, že u je ostro monotónna a C, m, h sú C^1. Derivovaním identít (2.14) podľa p_i dostaneme

$$\frac{\partial h}{\partial p_i}(p, U) = \frac{\partial m}{\partial p_i}(p, I)\bigg|_{I=C(p,U)} + \frac{\partial m}{\partial I}(p, I)\bigg|_{I=C(p,U)} \frac{\partial C}{\partial p_i}(p, U). \tag{2.17}$$

Podľa dôsledku z odseku 2.5 . Platí $\frac{\partial C}{\partial p_i}(p, U) = h_i(p, U)$. Z (2.14), (2.13) vyplýva, že ak $U = V(p, I)$ potom $I = \langle p, m(p, I)\rangle = \langle p, h(p, u(m(p, I)))\rangle = \langle p, h(p, V(p, I))\rangle = C(p, V(p.I)) = C(p, U)$. Môžeme teda (2.17) prepísať do tvaru

$$\frac{\partial m}{\partial p_i}(p, I) = \frac{\partial h}{\partial p_i}(p, U)\bigg|_{U=V(p,I)} - \frac{\partial m}{\partial I}(p, I) h_i(p, V(p, I)). \tag{2.18}$$

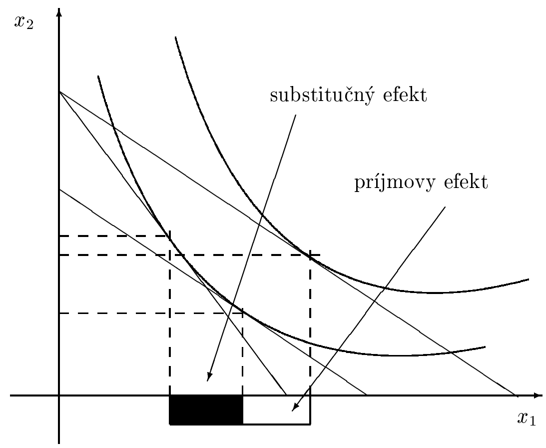
Prvý člen pravej strany nazývame *substitučným*, druhý *príjmovým efektom*.

Ak špeciálne vezmeme i – tu zložku (2.16), dostaneme

$$\frac{\partial m_i}{\partial p_i}(p, I) = \frac{\partial h_i}{\partial p_i}(p, U)\bigg|_{U=V(p,I)} - \frac{\partial m_i}{\partial I}(p, I) h_i(p, U)$$

Hoci podľa odseku 2.6 . je $\dfrac{\partial h_i}{\partial p_i} \le 0$, príjmový efekt môže obrátiť znamienko pravej strany ak $\dfrac{\partial m_i}{\partial I} < 0$.

Vidíme teda, že Giffenov je vždy podradný, naopak to platiť nemusí. Zo Sluckého identity totiž vyplýva, že dopad zmeny ceny statku na dopyt po ňom má dve zložky – *substitučný efekt* a *príjmový efekt*. Substitučný efekt, reprezentovaný prvým členom $\frac{\partial h_i}{\partial p_i}(p,U)\Big|_{U=V(p,I)}$ predstavuje vzájomný posun dopytu medzi statkami, druhý člen $-\frac{\partial m_i}{\partial I}(p,I)h_i(p,U)$ zasa zmenu dopytu v dôsledku ekvivalentnej zmeny príjmu (obr. 11)



Obr. 11. Sluckého identita.

2.9 Spotrebiteľov prebytok alebo „soľ nad zlato“

Už Smith sa zamýšľal nad paradoxom, prečo sú základné statky ako voda, vzduch, také lacné. Vysvetlením je tzv. spotrebiteľov prebytok.

Uvažujme normálny tovar, Marshallovský dopyt po ktorom ostro klesá s cenou, $\dfrac{\partial m_i}{\partial p_i}(p,I)<0$. Abstrahujeme od ostatných statkov, označíme $y = x_i$ a

$$D(p) = m_i(p,I)\Big|_{p_{-i},I \text{ fixované}}$$

(D – demand), kde $p_{-i} = (p_1,\dots,p_{i-1},p_{i+1},\dots,p_n)$.

Keďže $D(p)$ ostro klesá, má inverznú funkciu, ktorú označíme

$$p = p_D(y).$$

Predpokladajme, že aktuálna cena statku je p^* a spotreba spotrebiteľa je v rovnováhe, t. j. $y^* = D(p^*)$, alebo ekvivalentne $p^* = p_D(y^*)$.

Rozdeľme si interval $[0,y^*]$ $N-1$ bodmi $0 = y_0 < y_1 < \dots < y_{N-1} < y_N = y^*$ na N intervalov. Rovnovážna cena, ktorú by bol spotrebiteľ za spotrebu v intervale $[y_k, y_{k+1}]$ bol ochotný zaplatiť je $p_D(y_{k+1})$. Celkove by teda bol ochotný zaplatiť za spotrebu čiastku

$$\geq \sum_{k=0}^{N-1} p_D(y_{k+1})(y_{k+1}-y_k). \tag{2.19}$$

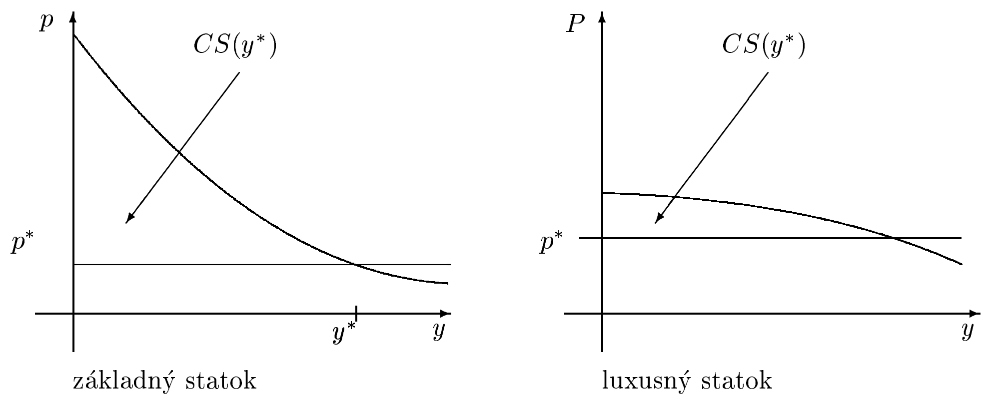
Ak sa s jemnosťou delenia približujeme k nule, hodnota (2.19) sa približuje k hodnote

$$\int_0^{y^*} p_D(y)\,\mathrm{d}\,y$$

Rozdiel medzi touto cenou, ktorú by spotrebiteľ bol ochotný zaplatiť a cenou p^*y^*, ktorú skutočne platí nazývame *spotrebiteľovým prebytkom*,

$$CS(y^*) = \int_0^{y^*} (p_D(y) - p^*)\,\mathrm{d}\,y =$$

(CS=consumer surplus). Dopyt po základných statkoch je typicky málo elastický, po luxusných je naopak silno elastický. Pre inverzné dopytové funkcie sa elasticita obráti. Z toho vyplýva, že spotrebiteľov prebytok je výraznejší u základných statkov. Vedela to intuitívne najmladšia princezná z rozprávky Soľ nad zlato.



Obr. 12. Spotrebiteľov prebytok.

Analogicky môžno definovať výrobcov prebytok. Z odseku 1.12 vieme, že ak je nákladová funkcia dodávateľa ostro konvexná, je jeho ponuková funkcia $S(p)$ rastúcou funkciou ceny. Funkcia $y = S(p)$ má vtedy inverznú funkciu, ktorú označme $p = p_S(y)$ $(S(p_S(y)) = y)$. Pripomeňme si, že ak je nákladová funkcia $C(y)$ diferencovateľná, potom podľa odseku 1.12 platí $p_S(y) = C'(y)$.

Diel výroby v intervale $[y_k, y_{k+1}]$ je dodávateľ ochotný vyrábať za cenu $p = p_S(y_{k+1})$; celkove by teda bol ochotný vyrábať rovnovážny objem za celkovú cenu

$$\int_0^{y*} p_S(y)\,\mathrm{d}\,y$$

Rozdiel medzi skutočným príjmom p^*y^* a príjmom, za ktorý by výrobca bol ochotný vyrábať sa nazýva *výrobcovým prebytkom*,

$$PS(y^*) = \int_0^{y^*} (p^* - p_S(y))\,\mathrm{d}\,y = \int_0^{y^*} (p_S(y^*) - p_S(y))\,\mathrm{d}\,y$$

(PS – producer's surplus).

2.10 Cvičenia

2.1. Dokážte, že ak je funkcia užitočnosti u ostro rastúca (spĺňa **P5**), potom $\hat{x}$ maximalizuje užitočnosť pri danom príjme práve vtedy, ak minimalizuje výdavky pri danej užitočnosti $U = u(\hat{x})$.

2.2. (Príklad 2 z kapitoly 2) Riešte úlohu spotrebiteľa pre všeobecnú:
a) C-D funkciu:

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}$$

b) Leontieffovu funkciu:

$$u(x) = \min\left\{\frac{x_1}{a_1}, \dots, \frac{x_n}{a_n}\right\}$$

c) Funkciu dokonale zameniteľných statkov:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

pre n premenných, t.j. riešte úlohu

$$\max u(x)$$
$$\langle p, x\rangle = I.$$

Návod: a) Vieme, že ostro rastúca transformácia funkcie užitočnosti zachováva preferencie. Transformácia $h(t) = \ln t$ zjednoduší výpočet.
c) B.u.n.v. môžme usporiadať premenné tak, aby platilo $\frac{a_1}{p_1} \geq \frac{a_2}{p_2} \geq \cdots \geq \frac{a_n}{p_n}$.

2.3. a) Aké musia byť a, b, aby funkcia

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 & \text{pre } x_2 \geq x_1 \\ a(bx_1 + x_2)^2 & \text{pre } x_1 \leq x_2, \end{cases}$$

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ bola funkciou užitočnosti?
b) Pre $a = 4/9, b = 1/2$ načrtnite čiary indiferentnosti preferencií, generovaných funkciou u.
c) Ak sú p_1, p_2 sú ceny statkov 1 a 2 pri hodnotách a, b z bodu b), aké množstvá x_1, x_2 nakúpi racionálny spotrebiteľ s príjmom $I = 10$?

2.4. Funkcia užitočnosti spotrebiteľa má tvar

$$u(x_1, x_2) = \min\{x_1 x_2, x_2\} \qquad \text{pre } x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

a) Interepretujte ekonomicky preferencie, generované u.
b) ak sa spotrebiteľ rozhoduje racionálne, má príjem $I = 10$ a ceny statkov sú p_1, p_2, aké množstvá jednotlivých statkov si vyberie?

2.5. Spotrebiteľova funkcia užitočnosti je

$$u(x_1, x_2) = x_1(x_2 + 1)$$

pre $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Aký je dopyt spotrebiteľa po statku x_1, ak má príjem $I = 10$ a ceny statkov p_i sú
a) $p_1 = 20,\ \ p_2 = 1$,
b) $p_1 = 1,\ \ p_2 = 20$.

2.6. Spotrebiteľova funkcia užitočnosti je

$$u(x_1, x_2) = (x_1 + 1)(x_2 + 2).$$

Vypočítajte Marshallovskú a Hicksovskú dopytovú funkciu.

2.7. Pre spotrebiteľa s funkciou užitočnosti

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 x_2 & \text{pre } x_1 \leq x_2 \\ x_2^2 & \text{pre } x_2 \leq x_1. \end{cases}$$

Nájdite Marshallovskú a Hicksovskú dopytovú funkciu. Interpretujte funkciu užitočnosti ekonomicky.

2.8. Funkcia užitočnosti spotrebiteĺa je

$$u(x_1, x_2) = (x_1 + 1)x_2 \qquad \text{pre } x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

V závislosti od cien p_i statkov x_i, $i = 1, 2$, vypočítajte Marshallovskú a Hicksovskú dopytovú funkciu po statkoch x_1, x_2.

2.9. Predmetom spotreby typickej sociálne slabšej domácnosti s celkovým mesačným rozpočtom 5040 Sk sú potraviny P s jednotkovou cenou 15 Sk a ostatné spotrebné predmety D s jednotkovou cenou 1 Sk. Domácnosť hodnotí spotrebu funkciou užitočnosti $u(P, D) = 30P^2D$. Akú čiastku bude domácnosť vydávať mesačne za potraviny a akú za ostatné spotrebné predmety?
a) Vrchnosť sa rozhodne podporiť spotrebu dotáciou ceny potravín v rozsahu 50 %. Aký to bude mať vplyv na spotrebu?
b) Vrchnosť zmení sociálnu politiku a namiesto cien potravín bude dotovať priamo domácnosti tak, aby im zabezpečil rovnakú užitočnosť, ako pri dotácii potravín. Aký vplyv to bude mať na spotrebu a na výdavky vrchnosti?
c) Je pri zabezpečaní rovnakej užitočnosti potreby z hľadiska výdavkov vrchnosti výhodnejšia dotácia cien, alebo priamy finančný príspevok? (pozri [1])

2.10. Pre aký typ preferencií (funkcie užitočnosti) je spotrebiteľ na tom zaručene rovnako bez ohľadu na to, či je zaťažený spotrebnou daňou, alebo daňou z príjmu? (pozri [2], [3])

2.11. Spotrebiteľ spotrebúva dva statky x_1, x_2 c cenou 1, má ostro monotónne ostro konvexné preferencie. Jeho ročný príjem ja I. Súčasnú spotrebu má x^* s $x_i^* > 0$, $i = 1, 2$. Predpokladajme, že na nasledovný rok dostane podporu $0 < g < x_1^*$, ktorú musí buť úplne minúť na statok 1, alebo ju môže odmietnuť. Dokážte tvrdenie, alebo jeho opak:
a) Ak je prvý statok normálny, potom efekt podpory je rovnaký, ako efekt podpory bez obmedzenia
b) To isté pre podradný statok (pozri [2], [3]).

2.12. Alenina príjmová elasticita dopytu po elektrine je 0.4, jej cenová elasticita dopytu po elektrine je -0.3. Alena minie 10 % svojho príjmu na elektrinu. Aká je jej substitučná cenová elasticita?
Návod: Využite Sluckého identitu.

2.13. Aký je substitučný efekt zmeny ceny statku v prípade dvoch
a) komplementárnych,
b) dokonale zameniteľných dvoch statkov?

2.14. Ak je nejaký tovar Giffenov, potom musí jeho spotreba klesať s príjmom, ale naopak to neplatí. Dokážte.

2.15. Daná je konečná množina spotrebných košov

$$X = \{a_1, a_2, \dots a_9\}$$

a platia na nej takéto preferencie:

$$\begin{array}{cccccc} a_1 \preceq a_6, & a_1 \preceq a_7, & a_2 \preceq a_6, & a_3 \preceq a_2, & a_4 \preceq a_5, & a_5 \preceq a_6, \\ a_5 \preceq a_8, & a_6 \preceq a_3, & a_6 \preceq a_4, & a_7 \preceq a_9, & a_8 \preceq a_7, & a_9 \preceq a_8. \end{array}$$

Nájdite funkciu užitočnosti, ktorá rozumne* generuje tieto preferencie.

2.16. Vládca Nopiltzin je nešťastný, že jeho Altomékovia priveľmi holdujú pitiu opojného pulque. Príjem reprezentatívneho Altoméka je 100 pesos, jeho funkcia užitočnosti je

$$u(x_1, x_2) = 40 \ln x_1 + x_2,$$

kde x_1 reprezentuje spotrebu pulque, x_2 zvyšok spotreby, obidve merané nákladmi na jednotku (t. j. $p_1 = p_2 = 1$). V súčasnosti je jeho príjem zaťažený daňou z príjmu 10 %. Notzpilin by chcel znížiť spotrebu pulque tak, že namiesto dane z príjmu bude vyberať spotrebnú zaň. Pri akej sadzbe spotrebnej dane dosiahne dosiahne Notzpilin rovnaký príjem? Ako sa zmení spotreba pulque?

*teda takú, ktorá priradí rovnakú hodnotu iba indiferentným košom

3 Dokonalá súťaž na čiastkovom trhu

Počnúc touto kapitolou začneme preberať implikácie teórie jednotlivých ekonomických subjektov pre správanie ekonomiky ako celku. V tejto kapitole sa sústredíme na trh jedného produktu abstrahujúc od ostatných produktov. Vyjdeme z predpokladu, že firmy vyrábajúce sledovaný tovar pôsobia v dokonale konkurenčnom prostredí: je ich tak veľa, že správanie jednotlivej firmy neovplyvní cenu produktu.

3.1 Ponuková funkcia výrobcu

Za predpokladu dokonalej súťaže je v zmysle odseku 1.12 jeho objem výroby rastúcou funkciou ceny, platí

$$S(p) = \left(C'\right)^{-1}(p),$$

teda v značení odseku 2.9

$$p_S(y) = C'(y)$$
$$(p = MC(y)).$$

Výrobcovia majú zisk, ak $p > p^*$ (kde $p^* = p_S(y^*)$ a $MC(y^*) = AC(y^*)$, pozri odsek 1.9), stratu v opačnom prípade (Obr. 7).

Priemysel chápeme ako sumu N identických výrobcov. Ak $S(p)$ je ponuková funkcia jednotlivého výrobcu, potom *ponuková funkcia priemyslu* $S_N(p)$ s N výrobcami je

$$S_N(p) = NS(p).$$

Ekvivalentne môžeme priemysel chápať ako jedného reprezentatívneho výrobcu s objemom výroby $y_N = Ny$ a nákladovou funkciou

$$C_N(y_N) = NC(y) = NC\left(\frac{y_N}{N}\right).$$

Inverzná ponuková funkcia reprezentatívneho výrobcu je daná rovnováhou jednotlivých výrobcov

$$p_{NS}(y_N) = p_S(y) = C'\left(\frac{y_N}{N}\right)$$

Pretože platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y_N} C_N(y_N) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y_N} NC\left(\frac{y_N}{N}\right) = C'\left(\frac{y_N}{N}\right),$$

môžeme spoločenstvo výrobcov nahradiť jedným reprezenatívnym výrobcom aj pri odvodzovaní inverznej ponukovej funkcie, ale s inou nákladovou funkciou

$$C_N(y) = NC\left(\frac{y}{N}\right).$$

3.2 Spoločenská dopytová funkcia

Či už Marshallovská alebo Hicksovská spoločenská dopytová funkcia je jednoducho súčtom zodpovedajúcich dopytových funkcií spotrebiteľov – jednotlivcov. U *normálneho* statku sú klesajúcou funkciou ceny. Ak je spotrebieľov M a považujeme ich za identických, tak pre spoločenskú dopytovú funkciu D_M splatí

$$D_M(p) = MD(p),$$

kde D je dopytová funkcia jednotlivého spotrebiteľa. Existencia jedného reprezentatívneho spotrebiteľa, ktorého dopytová funkcia by bola rovná spoločenskej dopytovej funkcii nie je zaručená bez ďalších predpokladov a zachádza za rámec textu. Je riešená v [3, 4].

V ďalšom budeme indexy M, N pri dopytových resp. ponukových funkciách vynechávať.

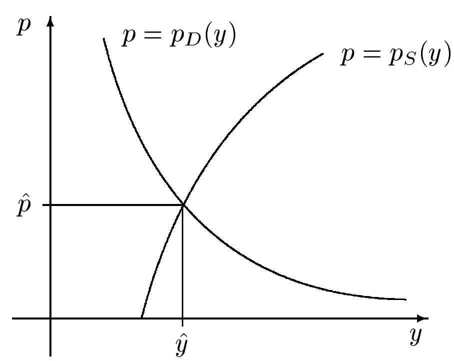
Inverznú funkciu k funkcii $y = D(p)$ budeme značiť $p = p_D(y)$. Všimnime si: perfektná elasticita priamej (dopytovej, ponukovej) funkcie značí dokonalú neelasticitu zodpovedajúcej inverznej funkcie. S inverznými funkciami dopytu a ponuky budeme pracovať viac než s priamymi.

3.3 Rovnováha na čiastkovom trhu pri dokonalej konkurencii

Sledujeme trh jedného produktu, ktorého ponuková funkcia priemyslu je $S(p)$ a spoločenská dopytová funkcia je $D(p)$. Trh je v rovnováhe, ak niet neuspokojeného dopytu ani prebytočnej ponuky, t. j. platí

$$S(\hat{p}) = D(\hat{p}). \tag{3.1}$$

Ak predpokladáme, že $S(p)$ je rastúca a $D(p)$ klesajúca a navyše aspoň jedná z nich ostro, rovnica (3.1) má najviac jedno riešenie – rovnovážnu cenu $\hat{p}$. (detaily ako cvičenie). Ak $p < \hat{p}$,



Obr. 13. Rovnováha na čiastkovom trhu.

je $S(p) < D(p)$ a vznikne neuspokojený dopyt, ak $p > \hat{p}$, vznikne nadbytočná produkcia, príjem dodávateľa sa však môže zmenšiť.

Úlohu možno formulovať aj dynamicky: ak cena nie je v rovnováhe, sledujeme, ako sa bude meniť s časom a či sa napokon na rovnováhe ustáli. Analyzovali sme dva modely, a to model s diskrétnym a model so spojitým časom.

a) *Diskrétny čas*: predpokladáme, že D, S sú diferencovateľné $D'(p) < 0$, $S'(p) \geq 0$ Produkcia v čase t závisí od ceny v čase $t-1$, dopyt od ceny v čase t, cena sa vyvíja tak, aby sa trh vyčistil:

$$D(p(t)) = S(p(t-1)) \tag{3.2}$$
$$p(t) = D^{-1} \circ S(p(t-1)) \tag{3.3}$$

Pevný bod $\hat{p}$ dynamického systému (3.2) je práve bod rovnováhy trhu $D(\hat{p}) = S(\hat{p})$. Ako sme ukázali, je asymptoticky stabilný vtedy ak $\left|\frac{S'(p)}{D'(p)}\right| < 1$, t. j. dopyt je elastickejší, ako spotreba.

b) *Spojitý čas:* Spotrebiteľ aj dodávateľ robia postupné kroky, aby sa k rovnováhe priblížili:
- pri voľnej tvorbe cien

$$\dot{p} = -a(S(p) - y)$$
$$\dot{y} = b(D(p) - y)$$

- pri cene určenej vyjednávaním

$$\dot{p} = -a(y - D(p))$$
$$\dot{y} = b(S(p) - y)$$

Rovnováha je opäť $\hat{y} = S(\hat{p}) = D(\hat{p})$, a je asymptoticky stabilná *vždy*.

3.4 Dlhodobá rovnováha pri voľnom vstupe na trh

Ak pri rovnováhe $D(p) = S(p) \quad [p_D(y) = p_S(y)]$, výrobcovia dosiahnu nenulový zisk, začnú priťahovať ďalších výrobcov. Pripomeňme si, že

$$p_S(y) = C'\left(\frac{y}{N}\right) \qquad N \text{ – počet výrobcov}$$
$$p'_S(y) = \frac{1}{N}C''\left(\frac{y}{N}\right).$$

S rastom N, teda sklon (elasticita) inverznej dotykovej funkcie klesá (pozri Obr. 7). V rovnováhe platí

$$C'\left(\frac{\hat{y}}{N}\right) = p_D(\hat{y}).$$

$\hat{y}$ bude rásť, $p_D(\hat{y})$ klesať až dovtedy, kým sa zisk nepriblíži k nule. N teda dostaneme z rovnice

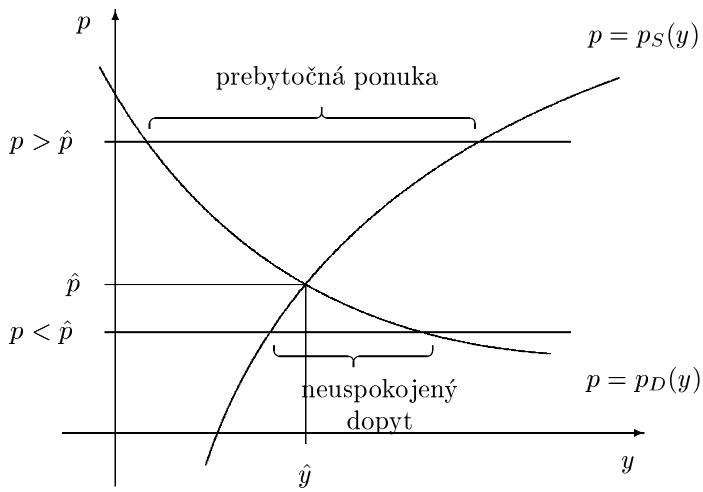
$$C'\left(\frac{\hat{y}}{N}\right) = p^*,$$

kde p^* je definované v odseku 1.10.

Pri voľnom vstupe na trh sa dlhodobe inverzná ponuková funkcia stáva dokonale neelastickou (a ponuková funkcia dokonale elastickou).

V stredoveku tomuto vývoju bránili cechy. V súčastnosti sa rôzne komunity dodávateľov snažia o regulačné opartrenia. Napr. do r. 1948 bol u nás obmedzený počet lekární. V USA r. 1980 zrušili reguláciu počtu leteckých dopravov a kamionistov, čo viedlo k okamžitému poklesu cien. Malo to však aj svoje negatívne stránky: tvrdá konkurencia nútila letecké spoločnosti k úsporám na komforte a bezpečnosti. Viedla k bankrotom leteckých spoločností a tým napokon aj k obmedzeniu súťaže. Snahy zamedziť vstup na trh konkurentom sme mohli zaznamenať aj u nás, napr. farmaceuti sa snažili o to, aby si lekáreň mohol otvoriť iba človek s farmaceutickým vzdelaním, Deutsches Telecom si priamo zmluvne vyhradil monopol na určitý čas atď.

Prechod z krátkodobej do dlhodobej rovnováhy je podrobne spracovaný v [9],[10].



Obr. 14. Podiel spotrebiteľa a dodávateľa na dani.

3.5 Vplyv daní, dotácií a regulácie cien

Regulácia ceny vedie k nerovnováhe, a to k prevahe dopytu nad ponukou pri regulovanej cene $p < \hat{p}$ a prevahe ponuky nad dopytom pri $p > \hat{p}$

Nerovnováha je tým väčšia, čím sú dopytová a ponuková funkcie elastickejšie (resp. inverzné menej elastické).

Napríklad v roku neúrody zemiakov 1994 zaviedla SR regulovanú cenu na zemiaky, v dôsledku čoho prakticky celkom zmizli z trhu.

Ako sa na rovnováhe prejaví zdanenie resp. dotácia? Ak vrchnosť zdaní statok *spotrebnou daňou* so sadzbou t na jednotku, bude cena pre spotrebiteľa $p+t$, ak cena pre dodávateľa je p. Rovnováha teda nastane pre $p = p_t$ také, že

$$D(p_t + t) = S(p_t) \quad (= y_t)$$

alebo ekvivalentne pre $y = y_t$ také, že $p_S(y_t) = p_t = p_D(y_t) - t$, teda

$$p_D(y_t) = p_S(y_t) + t \tag{3.4}$$

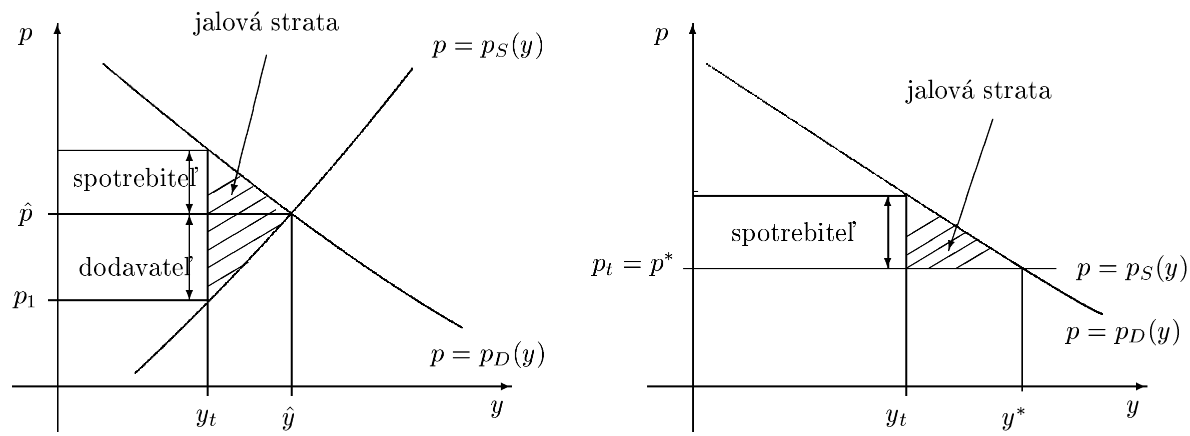
Z formuly (3.4) vyplýva, že otázka kto platí dane nie je dobre postavená, daň je v skutočnosti daňou za transakciu. Rozdelí sa medzi výrobcu a spotrebiteľa: čím je dopyt menej elastický ako ponuka, tým väčšiu časť dane platí spotrebiteľ. Z toho vyplýva, že v dlhodobej rovnováhe *celú daň hradí spotrebiteľ.* Rovnaká úvaha platí pre *dotáciu*, ktorá je vlastne daňou so zápornou hodnotou.

Ukážeme si, že každá daň značí stratu pri spotrebiteľovom i výrobcovom prebytku. Strata na spotrebiteľovom prebytku je

$$\Delta CS = \int_0^{\hat{y}} (p_D(y) - \hat{p})\,\mathrm{d}\,y - \int_0^{y_t} (p_D(y) - p_t - t)\,\mathrm{d}\,y$$

Analogicky

$$\Delta PS = \int_0^{\hat{y}} (\hat{p} - p_S(y))\,\mathrm{d}\,y - \int_0^{y_t} (p_S(y) - p_t)\,\mathrm{d}\,y$$



Obr. 15. Podiel spotrebiteľa a dodávateľa na dani.

Súčet strát je

$$\Delta CS + \Delta PS = \int_0^{\hat{y}} (p_D(y) - p_S(y))\,\mathrm{d}\,y - \int_0^{y_t} (p_D(y) - p_S(y) - t)\,\mathrm{d}\,y = \int_{y_t}^{\hat{y}} (p_D(y) - p_S(y))\,\mathrm{d}\,y + ty_t.$$

Člen ty_t predstavuje príjem vrchnosti z dane a spotrebiteľovi i výrobcovi sa vráti, ak sa použije v jeho prospech (napr. na stavbu ciest, školstvo, atď.). Zostáva však člen

$$\int_{y_t}^{y} (p_D(y) - p_S(y))\,\mathrm{d}\,y,$$

ktorý nazývame *jalovou (umŕtvenou) stratou* (deadweight loss)

3.6 Prípadové štúdie

1. Rovnováha

V rokoch neúrody v Anglicku v 19. storočí bohatí poskytovali charitatívnu pomoc chudobným tým, že odkúpili úrodu, spotrebovali jej pevnú časť a zvyšok predali chudobným za polovičnú cenu.

Na prvý pohľad je to ušľachtilá pomoc, v skutočnosti však úrody nepribudlo a chudobným sa teda viac nedostalo. Nielen to – teória rovnováhy ukazuje, že chudobní napokon za potraviny zaplatili rovnako.

Nech

$D(p)$ – je dopytová funkcia chudobných
K – spotreba bohatých (základný statok $\Longrightarrow$ K konšt.)
S – ponuka v roku neúrody (nezávislá od p)

Bez programu pomoci je rovnováha

$$D(\hat{p}) + K = S;$$

pri programe pomoci je

$$D\left(\frac{\overline{p}}{2}\right) + K = S.$$

Z toho vyplýva $\frac{\overline{p}}{2} = \hat{p}$, $\overline{p} = 2\hat{p}$. Akonáhle bohatí ponúkli program, cena sa ihned zdvojnásobila.

2. Trh pôžičiek

Za cenu pôžičky považujeme úrok r, ktorý musí dlžník platiť. Označíme $D(r)$ dopyt a $S(r)$ ponuku pri úroku r, ako obvykle predpokladáme, že D klesá a S rastie s r. Rovnovážny úrok $\hat{r}$ je riešením rovnice

$$D(\hat{r}) = S(\hat{r})$$

Ak sa zdaní zisk z úroku sadzbou t a dlžník môže (ako v USA) odpočítať náklady na pôžičku, potom v rovnováhe $\hat{r}$ platí

$$D((1-t)\hat{r}) = S((1-t)\hat{r}). \tag{3.5}$$

Ak označíme $\overline{y} = D((1-t)\overline{r})$, potom z (3.5) dostávame

$$\begin{aligned}(1-t)\overline{r} &= p_D(y) = p_S(y)\\ \overline{r} &= \frac{p_D(y)}{1-t} = \frac{p_S(y)}{1-t}\end{aligned}$$

To značí, že rovnovážna výška úroku bude vyššia, kým výška úroku po zdanení sa nezmení.

Pri nerovnakej sadzbe dane t_v pre veriteľov, t_d pre džníkov dostaneme

$$\overline{y} = D((1-t_d)\overline{r}) = S((1-t_v)\overline{r})$$

teda

$$\begin{aligned}(1-t_d)\overline{r} &= p_D(\overline{y})\\ (1-t_v)\overline{r} &= p_S(\overline{y})\end{aligned}$$

Skutočné úroky po odčítaní daní resp. úľav sú

$$r_d = (1-t_d)\overline{r}, \qquad r_v = (1-t_v)\overline{r}$$

teda platí $r_d = \dfrac{1-t_d}{1-t_v} r_v$. Ak je daň z úrokov vyššia ako úľava, ide o čistú daň, inak o čistú dotáciu.

3. Krátkodobá a dlhodobá rovnováha

Deľba práce, snaha po celoročnom zabezpečení a honba za efektivitou vedú v USA k tomu, že sa pestovanie poľnohospodárskych plodín koncentruje do najefektívnejších oblastí. (Dôsledky sú často aj nežiadúce: paradajky, či jablká sú celý rok ale sú bezchutné.) Imperial Valley v Californii sa takto stalo dominantným dodávateľom listového šalátu (lettuce). V r. 1979 vyhlásili odbory štrajk proti majiteľom fariem. Zníženie dodávky na asi 50 % viedlo v dôsledku malej elasticity dopytu k nárastu ceny na štvornásobok, takže príjmy majiteľov sa zdvojnásobili! Napriek tomu sa majitelia usilovali o dohodu. V jednej sezóne ich iní dodávatelia nemohli nahradiť, ale dlhodobe by ich nahradili a príjmy by klesli (neelastický dopyt $\to$ elastický inverzný dopyt).

4. Lafferov efekt

Zvýši vrchnosť príjem z daní zvyšovaním daňovej sadzby?

Ak sadzba dane z množstva t a rovnovážny objem y_t, príjem vrchnosti je ty_t.

Platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(ty_t) = y_t + t\frac{\mathrm{d}\,y_t}{\mathrm{d}\,t}$$

Diferencovaním rovnice rovnováhy

$$p_S(y_t) + t = p_D(y_t)$$

podľa t dostávame

$$p'_S(y_t)\frac{\mathrm{d}\, y_t}{\mathrm{d}\, t} + 1 = p'_D(y_t)\frac{\mathrm{d}\, y_t}{\mathrm{d}\, t}$$

a teda

$$\frac{\mathrm{d}\, y_t}{\mathrm{d}\, t} = \frac{1}{p'_D(y_t) - p'_S(y_t)}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t}(ty_t) = y_t + \frac{t}{p'_D(y_t) - p'_S(y_t)}.$$

Na druhej strane, y_t môžeme voľbou dostatočne veľkého t urobiť ľubovoľne malým. Ak sú $p'_S(y)$ resp. $|p'_D(y)|$ zdola ohraničené, platí pre dostatočne veľké t

$$y_t + \frac{t}{p'_D(y_t) - p'_S(y_t)} < 0,$$

čo značí, že príjem z daní s rastom t klesá. Má teda maximum pri nejakom $t = t^* > 0$ a ďaľším zvyšovanie sadzby dane t už nemá zmysel.

Dôsledkom pre trh práce je aj to, že so sadzbou dane záujem o prácu klesá a produktívni jedinci z krajiny odchádzajú.

3.7 Fixné faktory a ekonomická renta

Pri voľnom vstupe sa zisky asymptoticky blížia k nule. V niektorých odvetviach však voľnému vstupu na trh bráni ohraničenosť zdrojov v ekonomike ako celku. Najčastejším príkladom je priemysel ťažby zdrojov; ropa, uhlie, zemný plyn, drahé kovy, pôda, ale aj talenty (Pavarotti,...). Niekedy obmedzenosť zdrojov spôsobujú predpisy (licencie taxikárov V New Yorku, benzínové pumpy za socíku, lekárne,...)

Zdá sa, že v týchto prípadoch môže existovať dlhodobo nenulový zisk. Nie je to tak – existuje ekonomický mechanizmus, ktorý ho tlačí do nuly. Zisk je totiž nenulový iba vtedy, ak nezarátame *náklady nevyužitej príležitosti* (opportunity costs, alternatívne náklady). Je to trhová cena, za ktorú by sme mohli zdroj predať alebo prenajať. Ak poľnohospodár má zisk π po započítaní všetkých nákladov, okrem ceny pôdy, potom by vďaka trhovému mechanizmu bol ktokoľvek ochotný odkúpiť resp. predať pôdu za cenu π a najať roľníka. Nemá to nič spoločné s cenou, za ktorú pôdu nadobudol.

Vždy, keď existuje fixný faktor, zabraňujúci voľnému vstupu novej firmy existuje rovnovážna cena nájmu tohoto faktora. Pri regulačných ohraničeniach, kladúcich obmedzenia vstup nových firiem možno firmu príp. licenciu zakúpiť. Výška nerealizovaného prenájmu resp. predaja predstavuje pre majiteľa firmy náklady stratenej príležitosti, ktoré nazývame *ekonomická renta.*

Príklady

1. Taxikárska licencia v New Yorku stojí \$ 10000, veľké úplatky sa u nás za predchádzajúceho režimu dávali za benzínové pumpy.
2. Ekonomická renta za pôdu. Ak je cena produktu z danej pôdy p a nákladová funkcia je $C(y)$ a rovnovážne vyrábané množstvo je $\hat{y}$, potom pri korektne vyčíslenej rente platí

$$p\hat{y} - C(\hat{y}) - \text{ renta } = 0,$$

teda

$$\text{renta } = p\hat{y} - C(\hat{y}).$$

3.8 Cvičenia

3.1. Podľa [2, 3]. Ukážte, že zmena zisku pri zmene ceny produktu je rovná integrálu funkcie ponuky s pôvodnou cenou a zmenenou cenou ako medzami.

3.2. Dokážte, že rovnovážna cena kompetitívneho trhu je spoločenky optimálna v tom zmysle, že maximalizuje súčet prebytkov spotrebiteľov a výrobcov.

3.3. Podľa [2, 3]. Či sa zvýšením ceny celkový príjem dodávateľa zvýši, alebo zníži závisí od elasticity závislosti dopytu od ceny. Ako?

3.4. Podľa [2, 3]. 100 poľnohospodárskych podnikov pestuje kukuricu s prácou a kapitálom ako faktormi. Cena práce na vypestovanie y ton kukurice je $C(y) = y^2$.
a) Aká je funkcia ponuky jednotlivého podniku?
b) Aká je funkcia celkovej ponuky?
c) Predpokladajme, že trh je dokonale kompetitívny. Ak je dopyt po kukurici daný vzťahom $D(p) = 200 - 50p$, aká je rovnovážna cena a aké je zodpovedajúce vyrábané množstvo kukurice?
d) Čo potrebujete vedieť, aby ste mohli určiť rovnovážnu rentu pôdy?

3.5. Podľa [2, 3]. Každý zo 100 výrobcov (očíslovaných 1 až 100) člnov na tropickom ostrove vie vyrobiť 12 člnov ročne; nákladová funkcia výrobcu k je $C(y) = 11 + ky$, kde fixné náklady 11 vzniknú iba vtedy, ak výrobca vyrobí aspoň jeden čln. Ak je cena člna 25, koľko člnov sa ročne vyrobí?

3.6. Podľa [2, 3]. Dopyt slovenských spotrebiteľov po dáždnikoch je daný vzťahom $D(p) = 90 - p$. Dáždniky dodávajú slovenské a umbrelské firmy. Pre jednoduchosť predpokladajme, že v každej z krajín ich vyrába jedna reprezentatívn firma, ktorá sa správa kompetitívne a jej nákladová funkcia je $C(y) = y^2$.
a) Aká je celková ponuka dáždnikov?
b) Aká je rovnovážna cena a aké je rovnovážne množstvo?
c) Domáci výrobcovia lobujú o ochranu a vrchnosť odsúhlasí prirážku 30 Sk na zahraničný dáždnik. Aká bude cena domáceho dáždnika pre spotrebiteľa?
d) Koľko dáždnikov budú dodávať umbrelskí a koľko domáci výrobcovia?

3.7. Dopytová funkcia fernetu je $y = \frac{197-p}{7}$ za fľašu, jej ponuková funkcia je $y_1 = \frac{p-29}{7}$ za fľašu. Pôvodne nezdanenú fernetu zdanila vrchnosť 56 cenovými jednotkami za fľašu. O čo sa zvýšila cena fernetu pre spotrebiteľa?

3.8. Dopytová funkcia po balíčku cigariet je $D(p) = 1000 - 30p$, ponuková je $S(p) = 50p - 100$. V súčasnosti vrchnosť zdaňuje balíček cigariet spotrebnou daňou vo výške 20. Zvýši sa, alebo zníži príjem vrchnosti z dane, ak sa daň o málo zvýši?

3.9. Ponuková funkcia hovädzieho mäsa je $y = 10p - 5$, dopytová je $40 - 5p$. Vrchnosť usúdila, že zo zdravotných dôvodov je žiadúce znížiť konzumáciu hovädzieho mäsa o 20 %. Akou sadzbou spotrebnej dane to môže dosiahnuť?

3.10. Dopyt po Pepsine je daný funkciou $D(p) = \frac{3}{p+1}$, produkcia je daná funkciou $S(p) = -1+p$. Ak vrchnosť zaťaží Pepsinu DPH 23 %, aká časť dane (v krátkodobej rovnováhe) pripadne na spotrebiteľa?

3.11. Vrchnosť zaťažila terkelicu DPH 20 %. Dopyt po nej je daný funkciou $D(p) = 20 - 2p$, ponuka funkciou $S(p) = -5 + p$. Zvýši sa alebo zníži príjem vrchnosti z dane zvýšením jej sadzby? Zdôvodnite.

3.12. Dopyt po benzíne je daný funkciou $D(p) = 10 - 2p$, ponuka funkciou $S(p) = -1 + p$. Vrchnosť chce uvaliť na spotrebiteľov spotrebnú daň na benzín tak, aby na daniach vybrala 2 jednotky na stavbu ciest. Akú zvolí sadzbu dane?

3.13. Riešte úlohu analogickú úlohe zdanenia z odseku 3.5 pre prípad dane z hodnoty

3.14. Dopytová funkcia balíčku cigariet je $y = 50 - 2p$, ponuková $y = p/2$. Akú časť DPH vo výške 19 % znáša spotrebiteľ a akú dodávateľ?

3.15. Podľa [2, 3].

a) Aký je efekt dotácie na trhu s vodorovnou resp. zvislou funkcou ponuky?

b) Čo, ak je krivka dopytu zvislá a ponuka rastie s cenou?

c) Kto platí daň v poslednom prípade?

3.16. Podľa [2, 3]. Spotrebitelia považujú červené a modré ceruzky za dokonale zameniteľné, ponuka červených rastie s cenou. Ak sú ceny ceruziek p_c resp. p_m, Čo sa stane, ak vrchnosť zaťaží červené ceruzky spotrebnou daňou?

3.17. Podľa [2, 3]. USA dovážajú polovicu svojej spotreby ropy. Predpokladajme, že zvyšok sveta je ochotný dodať toľko ropy koľko jej treba, a to za cenu 25 USD za barel. Čo sa stane s cenou domácej ropy, ak vrchnosť zaťaží zahraničnú ropu sadzbou 5 USD za barel?

3.18. Podľa [2, 3]. Aká je jalová strata dane pri zvislej krivke dopytu?

3.19. Richard Levie Srdce chce svoju ďalšiu križiacku výpravu finacovať z výnosu spotrebnej dane na soľ. Ak je dopytová funkcia po soli $10 - \frac{p}{3}$ a ponuková $y = 1 + \frac{p}{2}$, pri akej vvýške dane vyberie Ríšo najviac? Koľko to bude?

3.20. Malystanský vládca Rulepeace Swordfish potrebuje peniaze na kampaň proti svojmu protivníkovi Schwarzbergovi. Preto zdaní cícer, ktorým sa obyvateľstvo živí, daňou z množstva vo výške t. Na jednej strane potrebuje čo najväčší príjem z dane, na druhej strane chce, aby spotreba cíceru neklesla o viac, než 20 %, aby príliš nepoklesla bojaschopnosť jeho vojska. Ak je dopytová funkcia cíceru $D(p) = 10 - 0.5p$ a ponuková $S(p) = -3 + 15p$, aké veľké určí t?

4 Nedokonalá konkurencia

4.1 Rovnováha monopolu

O monopole hovoríme, ak výrobok vyrába jedna firma. Na rozdiel od dokonalej konkurencie, kde predpokladáme, že výroba nemôže cenu výrobku ovplyniť, monopolný výrobca môže stanovovať cenu výrobku sám.

Ak je rovnovážna cena na kompetitívnom trhu $\hat{p}$ a jednotlivý výrobca stanoví cenu p, potom dopyt $D_1(p)$ po jeho výrobku je

$$D_1(p) = \begin{cases} 0 & \text{ak } p > \hat{p} \\ \text{neurčený} & \text{ak } p = \hat{p} \\ D(p) & \text{ak } p < \hat{p} \end{cases}$$

kde $D(p)$ je spoločenský dopyt po výrobku.

Na druhej strane, ak je firma monopolom, potom dopyt po jeho výrobku je rovný spoločenskému dopytu $D(p)$. Zisk Π monopolu je

$$\Pi = pD(p) - C(D(p))$$

alebo ekvivalentne

$$\Pi = p_D(y)y - C(y)$$

Racionálny monopol ho bude maximalizovať. Ak p_D, C sú diferencovateľné, kladné riešenie y_m tejto optimalizačnej úlohy bude spĺňať rovnicu

$$0 = \frac{d}{dy}\left(p_D(y)y - C(y)\right)\Big|_{y=y_m} = p'_D(y_m)y_m + p_D(y_m) - C'(y_m),$$

t. j.

$$p'_D(y_m)y_m + p_D(y_m) = C'(y_m), \tag{4.1}$$

alebo (marginal revenue) $MR(y) = C'(y)$ (hraničný príjem = hraničné náklady). Objem výroby $y = y_m$ a cenu $p_m = p_D(y_m)$ nazývame *rovnovážnymi* – monopolný dodávateľ nemá dôvod ich meniť.

Podmienku (4.1) môžeme prepísať:

$$p_D(y_m)\left[1 + p'_D(y_m)\frac{y_m}{p_D(y_m)}\right] = C'(y_m) \tag{4.2}$$

$$p_D(y_m)\left[1 + \frac{1}{\epsilon(p_m)}\right] = C'(y_m) \tag{4.3}$$

kde

$$\varepsilon(p_m) = \frac{p_m}{y_m}\frac{\mathrm{d}\,D}{\mathrm{d}\,p}(p_m)$$

je elasticita dopytu. Všimnime si, že je *záporná* ! Ak (4.2) porovnáme s rovnicou pre rovnováhu kompetitívnej firmy

$$p_D(\hat{y}) = C'(\hat{y})$$

vidíme, že rovnováha monopolu je od kompetitívnej rovnováhy tým ďalej, čím je elasticita dopytu spotrebiteľa v bode rovnováhy (v absolútnej hodnote) menšia.

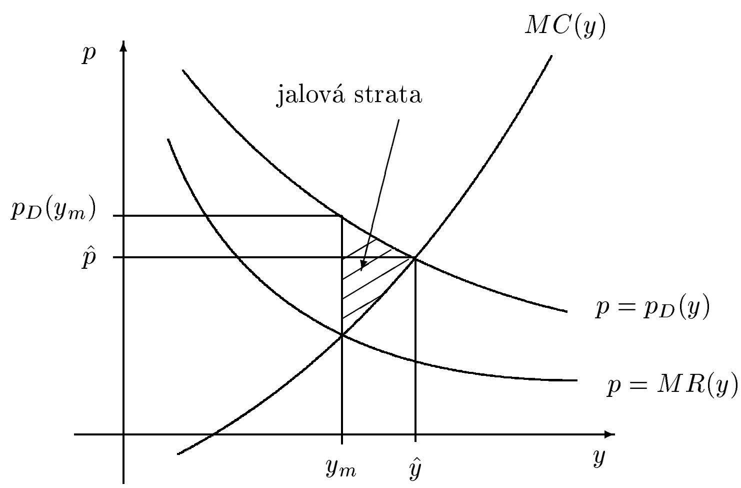
Keďže $\epsilon < 0$, z (4.3) vyplýva

$$\frac{C'(y_m)}{p_D(y_m)} < \frac{C'(\hat{y})}{p_D(\hat{y})}. \tag{4.4}$$

Keďže C je konvexná (a teda C' je rastúca) a p_D je klesajúca, zo (4.4) vyplýva

$$y_m < \hat{y}, \qquad p_D(y_m) > \hat{p}$$

To značí, že rovnováha monopolu sa dosahuje pri *menšom* objeme výroby, ako u kompetitívnej firmy a v tomto zmysle je monopolná výroba pre spotrebiteľa nevýhodná. Je to aj argument proti preferovaniu jediného výrobcu, ktoré sa presadzovalo za socializmu. Zdôvodňovalo sa to úsporami (predovšetkým na fixných nákladoch), ktoré sa dosiahnu centralizáciou výroby a vývoja.



Obr. 16. Rovnováha monopolu a jalová strata

4.2 Neefektivita monopolu

Neefektivitu monopolu môžeme vidieť ešte takto: keby monopolný výrobca ponúkol ďalší výrobok za cenu $p \in (MC(y_m), p_m)$, nejaký spotrebiteľ by si ho kúpil a výrobca by si zvýšil zisk (bez toho, že by zvýšil cenu *všetkých* výrobkov)

Za mieru neefektivity môžeme považovať aj *jalovú stratu* na spotrebiteľskom a výrobcovom prebytku, ktorá je analogicky ako u straty pri zdanení rovná

$$\int_{y_m}^{\hat{y}} (p_D(y) - C'(y))\,\mathrm{d}\,y = \int_{y_m}^{\hat{y}} p_D(y)\,\mathrm{d}\,y - C(\hat{y}) + C(y_m)$$

(obr. 16).

4.3 Zdaňovanie monopolu

Vyššia cena, ktorú monopolný výrobca oproti výrobcovi v konkurenčnom prostredí za výrobok utŕži vedie k úvahám, že by sa mu mal tento „nadmerný zisk“ zdanením odčerpať. Ukážeme si, že zdanenie ako spotrebnou daňou, tak aj daňou z hodnoty môže viesť k prehĺbeniu neefektivity monopolu.

Rovnováha y_t pri spotrebnej dani t je riešením úlohy

$$(p_D(y_t) - t)y_t - C(y_t) \to \max,$$

teda

$$p'_D(y_t)y_t + p_D(y_t) = C'(y_t) + t.$$

Rovnováha y_τ pri dani z hodnoty τ spĺňa

$$\frac{p_D(y_\tau)y_\tau}{1+\tau} - C(y_\tau) \to \max$$

teda

$$p'_D(y_\tau)y_\tau + p_D(y_\tau) = C'(y_\tau)(1+\tau). \tag{4.5}$$

Keďže ľavá strana rovníc pre y_t, y_τ sa môže s rastúcimi t, τ zväčšovať, môžu byť hodnoty y_t, y_τ menšie ako y_m a rovnovážne ceny p_t, p_τ väčšie, ako p_m. To značí, že neefektivita monopolu sa jeho zdanením môže ešte prehĺbiť.

Pri rovnosti výroby $y_t = y_\tau$ dostávame

$$C'(y_\tau)\tau = t$$

teda pre príjem vrchnosti platí

$$\tau\frac{p_D(y_\tau)}{1+\tau}y_\tau = \frac{p_D(y_\tau)}{C'(y_\tau)(1+\tau)}ty_\tau = \frac{p_D(y_\tau)}{C'(y_\tau)(1+\tau)}ty_t.$$

Keďže $p'_D(y_\tau) < 0$ platí

$$p_D(y_\tau) = C'(y_\tau)(1+\tau) - p'_D(y_\tau)y_\tau > C'(y_\tau)$$

teda $\dfrac{p_D(y_\tau)}{C'(y_\tau)(1+\tau)} > 1$. To znamená, že vrchnosť vyberie väčší objem daní pri dani z hodnoty.

Vplyvy iných typov zdaňovania pozri [1, 2, 3].

4.4 Cenová diskriminácia

Ak monopolný výrobca predáva rozličné jednotky tovaru za rozličné ceny, nazývame to *cenovou diskrimináciou*. Ako ukážeme cenovou diskrimináciou môže zvýšiť svoje zisky. Aby to mohol urobiť musí

- zamedziť opätovný predaj a
- rozlíšiť zákazníkov.

Rozpoznávame 3 druhy cenovej diskriminácie:

1. druhu (dokonalú), keď každá jednotka má inú cenu (v praxi je nerealizovateľná),
2. druhu, keď cena je závislá od množstva kupovaného tovaru (zlacnenie tovaru vo väčších baleniach, lacnejšie dlhodobejšie permanentky, regresívna sadzba telefónovania),

3. druhu, ak monopolný dodávateľ rozlíši zákazníka podľa dopytovej funkcie (Príklady: mládežnícke cestovné, zľavy dôchodcom, rozličné ceny akademických časopisov pre jednotlivcov a pre knižnice)

Rozoberieme si cenovú diskrimináciu 3. druhu. Nech p^i_D, $i = 1, 2$ sú inverzné dopytové funkcie dvoch druhov zákazníkov. Racionálny monopolný výrobca bude riešiť úlohu nájsť y_1, y_2 také, že

$$p^1_D(y_1)y_1 + p^2_D(y_2)y_2 - C(y_1 + y_2)$$

je maximálne, čo vedie na rovnice

$$p^1_D(y_1)\left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_1|}\right] = C'(y_1 + y_2)$$
$$p^2_D(y_2)\left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_2|}\right] = C'(y_1 + y_2)$$

a teda

$$p^1_D(y_1)\left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_1|}\right] = p^2_D(y_2)\left[1 - \frac{1}{|\varepsilon_2|}\right],$$

kde $\varepsilon_j = \varepsilon(p^j_D(y_j))$, $j = 1, 2$. Z rovnosti vyplýva $p_1(y_1) > p_2(y_2)$ ak $|\varepsilon_1| < |\varepsilon_2|$ Pri rovnovážnych cenách bude teda nižšiu z nich platiť tá skupína spotrebiteľov, ktorých elasticita dopytu (pri cene, ktorú im monopol určí) je vyššia. Sú to spravidla tí spotrebitelia, kotrí majú nižšie príjmy.

4.5 Prirodzené monopoly

Prečo vznikajú monopoly? Ozrejmíme si to na príklade.

Predpokladajme, že nákladová funkcia *jednotlivého* výrobcu je

$$C(y) = A + By^2.$$

Potom cena produktu, pri ktorej je zisk nulový je rovná minimu priemerných nákladov (odsek 1.8). Dosahuje sa pri y^*, ktoré rieši úlohu

$$AC(y) = \frac{A}{y} + By \to \min.$$

Riešením je

$$y^* = \sqrt{\frac{A}{B}}$$

a hodnota minima je

$$p^* = \frac{A}{\sqrt{\frac{A}{B}}} + B\sqrt{\frac{A}{B}} = 2\sqrt{AB}.$$

Pri tejto cene je podľa odseku 3.4 pri voľnom vstupe na trh tento v dlhodobej rovnováhe. Hodnota p^* sa pri AB konštantnom nemení, so zmenou A, B sa však mení hodnota y^*:

Ak N je počet výrobcov a $y = D(p)$ celkový spoločenský dopyt, v rovnováhe platí $D(p^*) = Ny^*$, teda

$$N = D(p^*)/y^* = \sqrt{\frac{B}{A}}D(p^*).$$

Ak je B oveľa väčšie ako sú A, je N veľké a voľný vstup na trh privedie veľa výrobcov, ktorí si budú konkurovať. Naopak, ak je A (predstavujúce fixné náklady) veľké v porovnaní s B, vyjde N malé a sú splnené podmienky pre vznik monopolu.

Vychádzajúc z týchto úvah nazývame *prirodzeným monopolom* monopol, ktorého fixné náklady sú prirodzene veľké, variabilné naopak malé. Typickými prirodzenými monopolmi sú verejné služby (telefóny, mestská hromadná doprava, rozvod elektriny, plynu atď.), najmä tzv. sieťové odvetvia. Na jednej strane sa môže stať, že monopol vďaka svojej pozícii na trhu dosiahne nenulový zisk (u nás v súčasnosti plyn, elektrina, palivá), na druhej strane však môže mať aj trvalú stratu (mestská hromadná doprava). Obidve odchýlky sú nežiadúce, preto sa vrchnosť snaží im čeliť a vytvára na tento účel osobitné inštitúcie (u nás Protimonopolný úrad, Úrad pre reguláciu sieťových odvetví).

Nadmerný zisk sa vrchnosť spravidla snaží odstrániť regulovanou cenou – v odseku 4.3 sme ukázali, že zdanenie monopolu môže jeho neefektivitu ešte prehĺbiť.

V prípade straty má vrchnosť dve možnosti:

1. Apriorná regulácia: Regulačným opatrením určí cenu p^* tak, aby mal monopol nulový zisk. Podľa odseku 1.9 bude vyrábať množstvo y^* také, že
$$p^* = MC(y^*) = AC(y^*).$$
Môže platiť ako $y^* < D(p^*)$, tak aj $y^* > D(p^*)$. V prvom prípade príde k nerovnováhe v podobe neuposkojeného dopytu. V druhom prípade môže prísť k sekundárnym stratám a typickej špirále klesajúceho dopytu a rastúcich strát, ako to poznáme napríklad z MHD.
2. Aposteriorná regulácia: Vrchnosť vyrovná straty, ktoré monopolu vzniknú pri jeho trhovej cene
$$p^* = AC(y_m) - p_D(y_m).$$
Toto riešenie vedie k rovnováhe, ani spotrebiteľ, ani dodávateľ nemajú dôvod niečo meniť.

Na vznik monopolov vplývajú aj veľkosť trhu, reštrikcia monetárnej politiky atď.

Čo je monopol a čo nie? Hranice nie sú celkom zreteľné. Napríklad, špecializovaný časopis monopolom byť môže, hoci časopisov je na trhu veľa. Na druhej strane, nealko nápoj určitej značky (napr. Coca-Cola) formálne vzaté monopolom je, v skutočnosti mu však konkurujú nápoje iných značiek (napr. Pepsi, Kofola). V takomto prípade hovoríme o *monopolisitckej konkurencii.*

4.6 Oligopol

Ak na čiastkovom trhu pôsobí viacero firiem, ktoré sú v súťaži ale ich je tak málo, že svojím správaním môžu trh ovplyvniť, hovoríme o *oligopole*.

Najprv budeme skúmať prípad dvoch firiem, vtedy hovoríme o *duopole*. Označme veľkosti ich produkcií y_i, ich spoločný agregovaný produkt je $Y = y_1 + y_2$. Cena produktu je určená inverznou dopytovou funkciou
$$p = p_D(Y) = p_D(y_1 + y_2).$$
Označíme $C_1(y)$, $C_2(y)$ nákladové funkcie výrobcov. Racionálne správanie výrobcov spočíva ako vždy v maximalizácii zisku. Tá však závisí od dopytu po jeho výrobkoch a tým aj od objemu výroby konkurenčnej firmy. Optimálny objem výroby bude teda *funkciou* (predpokladaného) objemu výroby konkurenčnej firmy: $y_1 = \widehat{y_1}(y_2),\;\; y_2 = \widehat{y_2}(y_1)$. $\widehat{y_1}$ a $\widehat{y_2}$ budú teda riešeniami úloh $(p = p_D)$:
$$\begin{aligned} p(\widehat{y_1} + y_2)\widehat{y_1} - C_1(\widehat{y_1}) &\geq p(y_1 + y_2)y_1 - C_1(y_1) \qquad \text{pre všetky } y_1 \\ p(\widehat{y_2} + y_1)\widehat{y_2} - C_2(\widehat{y_2}) &\geq p(y_1 + y_2)y_2 - C_2(y_2) \qquad \text{pre všetky } y_2. \end{aligned}$$

Rovnováha (Cournotova) vzniká, ak obidve firmy optimalizujú za predpokladu, že aj ich konkurenčná firma sa správa racionálne. Vtedy $\widehat{y_1} = \widehat{y_1}(\widehat{y_2}), \quad \widehat{y_2} = \widehat{y_2}(\widehat{y_1})$, teda $\widehat{y_1}, \widehat{y_2}$ riešia úlohu:

$$\begin{aligned} p(\widehat{y_1}+\widehat{y_2})\widehat{y_1} - C_1(\widehat{y_1}) &\geq p(y_1+\widehat{y_2})y_1 - C_1(y_1) \qquad \text{pre všetky } y_1 \\ p(\widehat{y_2}+\widehat{y_1})\widehat{y_2} - C_2(\widehat{y_2}) &\geq p(\widehat{y_1}+y_2)y_2 - C_2(y_2) \qquad \text{pre všetky } y_2. \end{aligned}$$

Nutnou podmienkou pre riešenie je

$$p'(\widehat{y_1}+\widehat{y_2})\widehat{y_1} + p(\widehat{y_1}+\widehat{y_2}) = C_1'(\widehat{y_1}) \tag{4.6}$$
$$p'(\widehat{y_1}+\widehat{y_2})\widehat{y_2} + p(\widehat{y_1}+\widehat{y_2}) = C_2'(\widehat{y_2}). \tag{4.7}$$

Všimnime si, že úlohu dupolu môžeme chápať ako hru dvoch hráčov s objemami výroby ako stratégiami a ziskom ako výplatou. Bezprostredne z definície Cournotovej rovnováhy vyplýva, že je Nashovou rovnováhou tejto hry.

Príklad. Nech $p(Y) = b - aY, C_i(y_i) = c_i + d_i y_i^2$. Potom rovnice (4.6), (4.7) vyzerajú takto.

$$\begin{aligned} -a\widehat{y_1} + b - a(\widehat{y_1}+\widehat{y_2}) &= 2d_1\hat{y}_1 \\ -a\widehat{y_2} + b - a(\widehat{y_1}+\widehat{y_2}) &= 2d_2\hat{y}_2 \end{aligned}$$

teda

$$\begin{aligned} 2(a+d_1)\widehat{y_1} + a\widehat{y_2} &= b \\ a\widehat{y_1} + 2(a+d_2))\widehat{y_2} &= b. \end{aligned}$$

Ich riešením je

$$\begin{aligned} \widehat{y_1} &= \frac{(2d_2+a)b}{3a^2+4a(d_1+d_2)+4d_1d_2} > 0 \\ \widehat{y_2} &= \frac{(2d_1+a)b}{3a^2+4a(d_1+d_2)+4d_1d_2} > 0, \end{aligned}$$

teda Cournotova rovnováha vždy existuje a je jediná.

4.7 Dynamika duopolu

Ak firmy duopolu nie sú v rovnováhe , ale majú možnosť svoje objemy výroby v diskrétnych okamihoch času upravovať, racionálne sa budú správať tak, že budú maximalizovať svoj zisk pri známom poslednom rozhodnutí rivala. Model postavíme tak, že v jednom časovom intervale kroku postupne obidve firmy reagujú na rozhodnutie rivala:

$$\begin{aligned} y_1(t+\frac{1}{2}) &= \widehat{y_1}(y_2(t)) \\ y_2(t+1) &= \widehat{y_2}\Big(y_1\big(t+\frac{1}{2})\Big) \end{aligned}$$

alebo

$$p'\Big(y_1\Big(t+\frac{1}{2}\Big)+y_2(t)\Big)y_1\Big(t+\frac{1}{2}\Big) + p\Big(y_1\Big(t+\frac{1}{2}\Big)+y_2(t)\Big) = C_1'\Big(y_1\Big(t+\frac{1}{2}\Big)\Big) \tag{4.6}$$
$$p'\Big(y_1\Big(t+\frac{1}{2}\Big)+y_2(t+1)\Big)y_2(t+1) + p\Big(y_1\Big(t+\frac{1}{2}\Big)+y_2(t+1)\Big) = C_2'(y_2(t+1)). \tag{4.7}$$

V prípade príkladu zo odseku 4.6 nadobudnú vzťahy (4.6), (4.7) tvar

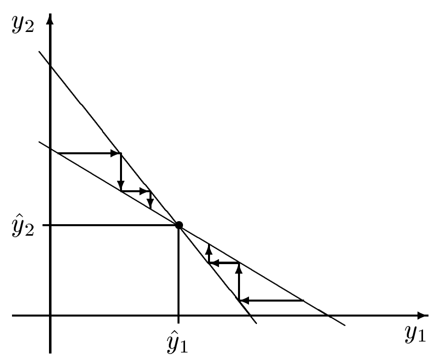
$$y_1\Big(t+\frac{1}{2}\Big) = \frac{b - ay_2(t)}{2(a+d_1)} \tag{4.8}$$

$$y_2(t+1) = \frac{b - ay_1\Big(t+\frac{1}{2}\Big)}{2(a+d_2)} \tag{4.9}$$

Dosadením (4.6) do (4.7) dostávame

$$y_2(t+1) = \frac{a^2}{4(a+d_1)(a+d_2)}y_2(t) + \frac{(2d_1+a)b}{4(a+d_1)(a+d_2)}.$$

Pretože $a^2 < 2(a+d_1)(a+d_2)$, rovnovážny bod je asymptoticky stabilný (obr. 17).



Obr. 17. Dynamika duopolu

Vo verzii so spojitým časom môžeme ich správanie modelovať diferenciálnymi rovnicami

$$\dot{y_i} = \alpha_i \frac{\partial \Pi_i}{\partial y_i}(y_1, y_2) \qquad \alpha_i > 0 \tag{4.10}$$

V prípade z odseku 4.5 rovnice (4.10) vyzerajú takto:

$$\dot{y_1} = -2\alpha_1(a+d_1)y_1 - \alpha_1 a y_2 + \alpha_1 b$$
$$\dot{y_2} = -2\alpha_2(a+d_2)y_2 - \alpha_2 a y_1 + \alpha_2 b.$$

Pre vlastné hodnoty lineárnej časti (4.11) platí

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2(a+d_1)\alpha_1 - 2(a+d_2)\alpha_2 < 0$$
$$\lambda_1\lambda_2 = 4(a+d_1)(a+d_2)\alpha_1\alpha_2 - a^2\alpha_1\alpha_2 = 3a^2\alpha_1\alpha_2 + a(d_1+d_2) + d_1 d_2 > 0$$

preto je aj v tomto prípade rovnovážny bod asymptoticky stabilný.

Je zaujímavé, že Cournot sa úlohou duopolu zaoberal práve z tohoto dynamického hľadiska, a to dávno pred Nashom.

4.8 Oligopol s väčším počtom firiem

Analogicky, ako v prípade duopolu volí každý z N oligopolných výrobcov objem svojej produkcie tak, že jeho zisk spĺňa

$$p_D(Y)y_i - C_i(y_i) \to \max_{y_i} \tag{4.11}$$

kde $Y = y_1 + \dots y_N$. Nutnou podmienkou k (4.11) je

$$p'_D(Y)y_i + p_D(Y) = C'_i(y_i). \tag{4.12}$$

Ak sú firmy identické, platí $y_i = \frac{Y}{N}$, $Y = Ny$ kde y je produkcia jednej firmy. Potom sa (4.12) prepíše do tvaru

$$p'_D(Y)\frac{Y}{N} + p_D(Y) - C'\Big(\frac{Y}{N}\Big) = 0$$

a podľa odseku 3.1

$$p'_D(Y)\frac{Y}{N} + p_D(Y) - C'_\Sigma(Y) = 0.$$

Pre N veľmi veľké je prvý člen ľavej strany veľmi malý, preto

$$p_D(Y) \approxeq C'_\Sigma(Y) = C'(y).$$

Rovnováha je teda blízka kompetitívnej.

4.9 Kartel

V karteli dve (alebo viac) firiem spolupracuje, aby spoločne dosiahli maximálny zisk. Hľadá sa teda dvojica y_1^k, y_2^k tak, aby

$$\Pi = p(y_1^k + y_2^k)(y_1^k + y_2^k) - C_1(y_1^k) - C_2(y_2^k) \to \max$$

čo vedie na dvojicu rovníc

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}(y_1^k, y_2^k) = p'(y_1^k + y_2^k)(y_1^k + y_2^k) + p(y_1^k + y_2^k) - C'_i(y_i) = 0$$

a teda aj

$$C'_1(y_1^k) = C'_2(y_2^k)$$

Všimnime si, že rovnováha kartelu *nie je* Nashovou rovnováhou, pretože

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial y_1}(y_1^k, y_2^k) = p'(y_1^k + y_2^k)y_1^k + p(y_1^k + y_2^k) - C'_1(y_1^k) = \underbrace{\frac{\partial \Pi}{\partial y_1}(y_1^k, y_2^k)}_{=0} - p'(y_1^k + y_2^k)y_2^k > 0$$

t. j. firmy zvýšia zisk, ak jednostranne zvýšia výrobu.

Preto sú kartely *nestabilné*, čo sa v praxi prejavuje tak, že firmy majú často snahu partnerov „dobehnúť". Napríklad letecké spoločnosti udávajú na letenkách iné vyššie než akciové ceny. Na druhej strane sa firmy tomuto bránia napríklad politikou „beat any price" (predáme tovar za doložený cenu iného predajcu).

4.10 Bertrandova rovnováha

V Cournotovom modeli rozhodovali firmy duopolu o množstvách produkcie, ceny sa určovali automaticky tak, aby sa vyrovnala ponuka s dopytom. Cournotova rovnováha bola Nashovou rovnováhou v hre, ktorej účastníci boli firmy s vyrábanými množstvami ako stratégiami a ziskom ako výplatou.

Alternatívne si môžeme predstaviť, že firmy volia ceny a vyrábané množtvo sa určí zo spoločenskej dopytovej funkcie. Úlohu opäť interpetujeme ako hru avšak s cenami ako stratégiami. Našou snahou bude identifikovať Nashove rovnováhy, pri ktorých hráči nebudú mať stratu.

Pre jednoduchosť predpokladajme, že ide o dvoch identických výrobcov s lineárne rastúcimi nákladmi, teda $C(y) = cy$. Ak $D(p)$ je spoločenský dopyt po výrobku, dopyt $D_1(p_1, p_2)$ po výrobkoch prvej z firiem bude

$$D_1(p_1, p_2) = \begin{cases} D(p_1) & \text{ak } p_1 < p_2 \\ \frac{1}{2} D(p_1) & \text{ak } p_1 = p_2 \\ 0 & \text{ak } p_1 > p_2. \end{cases}$$

Analogický vzorec platí pre dopyt $D_2(p_1, p_2)$ druhého výrobcu. Platí

Veta 4.1. *Jediná (Nashovsky) rovnovážna cena bez straty je kompetitívna cena* $p^* = c$ $(=C'(y))$.

Dôkaz. Pre zisk i-tej firmy Π platí

$$\Pi(y_i, p_i) = (p_i - c) y_i \begin{cases} < 0 & \text{ak } c > p_i \\ \geq 0 & \text{ak } c \leq p_i. \end{cases}$$

Ak $\widehat{p_1} = \widehat{p_1}(p_2)$ je optimálna cena prvej firmy pri danej cene p_2 druhej, platí

$$\widehat{p_1}(p_2) = \begin{cases} \text{čokoľvek } > p_2 & \text{ak } p_2 < c, \text{ (lebo sa vyhneme strate)} \\ \text{neexistuje,} & \text{ak } p_2 > c \text{ lebo pre } p_1 \nearrow p_2 \text{ je } \Pi \to p_2 D(p_2), \text{ pre } p_1 = p_2 \text{ je } \frac{1}{2} p_2 D(p_2) \\ c, & \text{ak } p_2 = c \end{cases}$$

Keďže firmy vystupujú v modeli symetricky, vyplýva z toho, že inej rovnováhy bez straty ako (c, c) niet. Na druhej strane sa dá bezprostredne overiť, že jednostrannou odchýlkou od dvojice stratégií (c, c) účastník na výplate stratí a teda táto dvojica spĺňa definíciu Nashovej rovnováhy. □

Je prekvapujúce, že v Bertrandovom modeli sa už pri účasti iba dvoch firiem dosahuje kompetitívna cena. Určitým vysvetlením je skutočnosť, že Bertrandov model modeluje aukciu, ktorej účastníci predkladajú svoje ponuky súčasne v zapečatených obálkach bez znalosti ponuky rivala. Je známe, že pri tomto type aukcií je možné dosiahnuť nízku cenu ponuky už pri malom počte jej účastníkov.

4.11 Cvičenia

4.1. Softwarová firma vyvinula nový programový produkt. Pretože ho má chránený copyrightom, pôsobí ako monopolný dodávateľ. Dopyt po programe je daný vzťahom $y = 50000 - 100p$, každý spotrebiteľ kúpi najviac jednu kópiu. Hraničná cena distribúcie je 10 peňažných jednotiek za kópiu. Ak firma predáva maximalizujúc svoj zisk, koľko je spotrebiteľov, ktorí by si kúpili výrobok za hraničnú cenu, ale nekúpia si ho za monopolnú cenu?

4.2. Saudovská Arábia dovolí ostatným členom OPEC predávať akékoľvek množstvá ropy pri cene, ktorú sama stanovila a ktorú ostatné štáty OPEC akceptujú. Nech dopyt po rope je daný vzťahom

$$p = 88 - 2y,$$

kde p je cena za barel ropy a y je veľkosť dopytu v miliónoch barelov ročne. Nech celkové množstvo ropy, dodané ostatnými členmi OPEC je

$$y_r = 0.6p.$$

Predpokladajme, že krivka hraničných nákladov Saudovskej Arábie je daná vzťahom $MC = 15$.
a) Koľko ropy a pri akej cene vyvezie Saudovská Arábia za predpokladu, že chce maximalizovať zisk?
b) Koľko ropy vyvezú ostatné krajiny OPEC pri tejto cene?

4.3. Jakutská letecká spoločnosť má výhradné právo na lokálne letisko. Lieta jeden let denne do Irkutska lietadlom s kapacitou 100 cestujúcich. Náklady na let sú $4000 + 10y$, kde y je počet cestujúcich. Dopyt po letoch do Irkustska je $y = 165 - 0.5p$. Ak spoločnosť maximalizuje svoj zisk, koľko je rozdiel medzi hraničnými nákladmi na dopravu ďalšieho cestujúceho a cenou, ktorú je cestujúci ochotný zaplatiť za cestu?

4.4. Dopyt po lístkoch na rockový koncert pod voľným nebom je daný vzťahom $D(p) = 500 - 250p$. Kapacita priestoru, kde sa usporiada, je prakticky neobmedzená, náklady však rastú s počtom návštevníkov podľa formuly $C(y) = 10 + 0.1y^2$. Usporiadateľ (ako monopolný dodávateľ) určil cenu lístka tak, aby maximalizoval svoj zisk. Po vypredaní lístkov uvažuje o tom, že zníži cenu, aby znova maximalizoval zisk zo zvyšku lístkov. Aká bola prvá a aká druhá cena? Rozhodne sa pre tento krok?

4.5. Monopolný výrobca má konštantné hraničné náklady ($C(y) = 10y$), dopyt po jeho výrobku je $D(p) = 100 - p$. O čo sa zmení cena výrobku pre spotrebiteľa, ak vrchnosť zaťaží výrobok daňou z hodnoty vo výške 10 %?

4.6. Monopolný výrobca na území bývalej ČSFR má konštantné hraničné náklady 2 Sk na jednotku výrobku. Dopyt po výrobku je $y_1 = 8000 - 800p_1$ na Slovensku a $y_2 = 800 - 200p_2$ v Česku, kde p_1 je cena výrobku v SR a p_2 v ČR. Aký bude rozdiel medzi cenami p_1 a p_2, ktoré bude výrobca účtovať?

4.7. V Skalici je rovnako žien a mužov. Dopyt žien po trdelníkoch je $D_z(p) = 2 - p$ pre $p \leq 2$, mužov $D_m(p) = 1 - p$ pre $p \leq 1$. Ich monopolný výrobca Šablatura má nákladovú funkciu $C(y) = 1 + ay$. Ak vyrába tak, aby maximalizoval svoj zisk, pri akom a budú trdelník kupovať muži aj ženy?

4.8. Jediná koncertná agentúra v meste predáva abonentky na nasledujúcu sezónu. Ak sú dopytové funkcie zárobkovo činných $y_z = 7 - p$ a penzistov $y_p = 8 - 2p$ v závislosti od ceny lístka a nákladová funkcia agentúry je $C(y) = 10 + \frac{1}{4}y^2$, po čom bude predávať lístky zárobkovo činným a po čom penzistom, aby maximalizovala svoj zisk?

4.9. Dopyt po výrobku prirodzeného monopolu je daný funkciou $D(p) = 5 - p$, náklady monopolu sú dané funkciou $C(y) = 10 + 0.1y^2$. Ako musí vrchnosť dotovať jednotku produktu monopolu, aby nebol stratový?
(*Poznámka.*) Monopol určí cenu <u>po</u> upovedomení o dotácii!

4.10. Dopyt po produkte prirodzeného monopolu je daný vzťahom $D(p) = 50 - p/2$, nákladová funkcia je $C(y) = 1200 + 10y$. Monopol optimalizuje svoj zisk. Akou najmenšou dotáciou produktu monopolu dosiahne vrchnosť, aby nemal stratu?
Pozn.: Vrchnosť rozhoduje o dotácii <u>po tom</u>, čo monopol zvolí cenu.

4.11. Edison a Tesla si rozdelili trh gramofónov. Ich náklady na výrobu sú $C_E(y) = 2 + y$, $C_T(y) = 1 + 2y$. Edisonovi priemyselní špióni zistili, že Tesla stanovil svoju výrobu na 10 kusov. Ak je dopytová funkcia po gramofónoch $D(p) = 50 - 2p$, koľko gramofónov bude vyrábať Edison, aby maximalizoval svoj zisk?

4.12. Pre príklad duopolu s dopytovou funkciou $p_D(Y) = b - ay$, $C_i(y_i) = c_i + d_i y_i^2$ a spojitú dynamiku

$$\dot{y}_i = \alpha_i \frac{\partial \pi_i}{\partial y_i},$$

$i = 1, 2$, nájdite stacionárne riešenie a rozhodnite o jeho stabilite.

4.13. Elasticita dopytu po letoch z Addis Abeby do Kuala Lumpuru je konštantná a rovná -1.5. Ak sú 4 spoločnosti, ktoré ich prevádzkujú v Cournotovej rovnováhe, aký je pomer ceny k hraničným nákladom?

4.14. Ežo a Gábor Vlkolínski sú jediní, čo vo Vlkolínci pečú chlieb. Ich náklady na výrobu kila chleba sú $C_E(y) = 1 + y^2$, $C_G(y) = 2 + y$. Závislosť dopytu po chlebe od jeho ceny je daná vzťahom $y = 10 - p$. Ežo aj Gábor predpokladajú, že konkurent volí objem výroby v závislosti od ich vlastného objemu výroby tak, aby maximalizoval zisk. Za čo budú chlieb predávať?

4.15. Ak sú dve firmy duopolu s konštantnými hraničnými nákladmi v Cournotovej rovnováhe, ktorá z nich bude dodávať viac a prečo?

4.16. Saudovská Arábia a Venezuela sa dohodli, že budú na trh dodávať toľko ropy, aby súčet ich ziskov bol maximálny. Ak je dopytová funkcia ropy $y = 100 - \frac{1}{2}p$, nákladová funkcia Saudovskej Arábie $C(y) = 2 + y^2$, Venezuely $C(y) = 1 + 2y^2$, aký bude zisk Venezuely?

4.17. V meste vychádzajú dvoje noviny NOVOSTI (N) a STAROSTI (S). Dopyt po nich, meraný desiatkami tisícov predplatiteľov je $21 - 2p_N + p_S$ po N a $21 + p_N - 2p_S$ po S, kde p_N, p_S sú po rade ich ceny. Hraničná cena tlače výtlačku sa vyrovná zvýšenému príjmu z reklamy (teda celkovo je nulová). Ak sa vydavatelia, ktorí doteraz volili Cournotovsky rovnovážne množstvá vopred dohodnú na spoločnom množstve, o čo sa zvýšia ceny novín? (*Úloha sa vymyká z látky v texte.*)

4.18. Firmy 1, 2 majú nákladové funkcie $C_1(y_1) = 1 + 2y_1^2$, $C_2(y_2) = 2 + y_2^2$, dopyt po ich produkte sa riadi vzťahom $D(p) = 10 - p$. Pre ktorú z funkcií je z hľadiska jej zisku prechod z duopolistickej konkurencie na kartel výhodný?

4.19. Z Dnepropetrovska do Alma-Aty lietajú 2 letecké spoločnosti Alfa a Beta. Dopytová funkcia po letoch v závislosti od ceny lístka je $y = 50 - p$, nákladové funkcie spoločností sú $C_\alpha(y) = 1 + y^2$ pre Alfu, $C_\beta(y) = 1 + 2y$ pre Betu. Ako sa zmenia zisky spoločnosti Alfa a Beta oproti ziskom v Cournotovej rovnováhe vytvoria kartel a maximalizujú spoločný zisk?

4.20. Moskonf a Roskonf vyrábajú konfety (ruské bonbóny) a ich nákladové funkcie sú $C_M(y) = 1 + 2y^2$, $C_R(y) = 2 + y^2$. Ak sa rozhodnú vytvoriť kartel, kto bude vyrábať viac?

4.21. Nikos nahovorí Kostasa, aby na trh dodávali také množstvo chalvy, aby maximalizovali spoločný zisk. Kým Kostas sa dohody drží, Nikos tajne dodáva také množstvo chalvy, aby maximalizoval *svoj* zisk. Ak je dopyt po chalve riadený funkciou $D(p) = 15 - p$ a nákladové funkcie Nikosa resp. Kostasa sú $C_N(y) = 1 + y^2$ resp. $C_K(y) = 2 + \frac{1}{2}y^2$, koľko bude vyrábať Nikos a koľko Kostas?

4.22. Mišo, Ondro a Juro sú jedinými výrobcami parenice v okolí. Mišo vyrába s konštatnými hraničnými nákladmi 2 , Ondrove a Jurove náklady v závislosti od objemu ich výroby y sú $1 + 2y^2$ resp. $2 + y^2$. Pôvodne tvorili oligopol,v ktorom pri maximalizácii svojho zisku Mišo vyrobil 1 jednotku parenice. Potom vytvorili kartel. Ak je dopytová funkcia po parenici $D(p) = a - p$, $a > 0$, ako sa zmenil objem výroby Ondra a Jura oproti Cournotovej rovnováhe?

5 Výmena

5.1 Rovnováha úplného trhu pri čistej výmene

V predchádzajúcej kapitole sme analyzovali čiastkový trh s jedným produktom. Abstrahovali sme od toho, že v skutočnosti nemožno takéto trhy izolovať.

Prvý krok k analýze všeobecného trhu urobíme za predpokladu čistej výmeny – nebudeme sa zaujímať o pôvod (výrobu) statkov. Subjekty, ktoré sa na trhu zúčastňujú vstupujú na trh vybavení statkami, ktorých predajom získavajú prostriedky na nákup statkov na trhu. Správajú sa racionálne a snažia sa uspokojiť svoje preferencie, generované funkciou užitočnosti.

Nech

N	je počet subjektov,
n	je počet statkov, $(x_1, \dots, x_n)$ vektor ich množstiev,
$u^{(i)}$	je funkcia užitočnosti i-teho účastníka,
$m^{(i)}(p, I)$	je Marshalovská dopytová funkcia i-teho účastníka,
$\omega^{(i)} = (\omega_1^{(i)}, \dots, \omega_n^{(i)})$	je počiatočné vstupné vybavenie statkami i-teho účastníka.

Príjem $I^{(i)}$ i-teho účastníka je príjem z predaja statkov, ktorými je vybavený:

$$I^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} p_j \omega_j^{(i)} = \langle p, \omega^{(i)} \rangle.$$

Správajúc sa racionálne rieši úlohu (2.1), (2.2) Kapitoly 2:

$$u^{(i)}(x) \to \max$$

pri podmienke svojho rozpočtového ohraničenia

$$\langle p, x \rangle = I^{(i)} = \langle p, \omega^{(i)} \rangle.$$

Jej riešenie je reprezentované Marshallovskou dopytovou funkciou

$$x^{(i)} = m^{(i)}(p, \langle p, \omega^{(i)} \rangle);$$

všimnime si, že pre každé $k > 0$ platí

$$m^{(i)}(kp, \langle kp, \omega^{(i)} \rangle) = m^{(i)}(p, \langle p, \omega^{(i)} \rangle),$$

t. j. riešenie závisí iba od pomeru cien statkov. *Rovnováha (Walrasova)* nastane vtedy, ak celkový dopyt po tom-ktorom statku neprekročí jeho ponuku danú súčtom vybavení jednotlivých účastníkov:

$$\sum_{i=1}^{N} m^{(i)}(p, \langle p, \omega^{(i)} \rangle) \le \sum_{i=1}^{N} \omega^{(i)}. \tag{5.1}$$

V rovnováhe sú všetci účastníci trhu uspokojení a nemajú dôvod niečo meniť.

Otázka je, či existuje $p = p^*$, pri ktorom platí (5.1).

Označme

$$z(p) = \sum_{i=1}^{n} \left[m^{(i)}(p, \langle p, \omega^{(i)} \rangle) - \omega^{(i)} \right]$$

vektor rozdielov medzi dopytmi po jednotlivých statkoch a ich ponukami. Potom (5.1) môžeme zapísať v tvare

$$z(p) \leq 0 \qquad (\Leftrightarrow z_j(p) \leq 0 \quad \text{pre všetky } j). \tag{5.2}$$

Všimnime si, že platí

$$z(p) = z(kp) \qquad \text{pre všetky } k > 0.$$

Ďalej platí

Veta 5.1 (Walrasov zákon)**.** *Ak sú preferencie účastníkov trhu ostro monotónne, potom pre každé p platí*

$$\langle p, z(p) \rangle = 0.$$

Dôkaz.

$$\langle p, z(p) \rangle = \left\langle p, \sum_{i=1}^{N} \left[m^{(i)}(p, \langle p, \omega^{(i)} \rangle) - \omega^{(i)} \right] \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \left[\left\langle p, m^{(i)}(p, \langle p, \omega^{(i)} \rangle) \right\rangle - \langle p, \omega^{(i)} \rangle \right],$$

pretože každý z účastníkov trhu spĺňa rozpočtové ohraničenie. □

Walrasov zákon predstavuje rovnováhu príjmov a výdavkov: čiastku, ktorú účastníci trhu utŕžia za statky, ktorými sú vybavení minú na statky, ktoré zakúpia.

Dôsledok. *Ak sú preferencie účastníkov ostro monotónne, p^* je (Walrasovsky) rovnovážny vektor cien a $z_j(p^*) < 0$, potom $p_j^* = 0$. Inak povedané, vo Walrasovej rovnováhe s kladnými cenami sa vyčerpá celá ponuka.*

Ak sú preferencie všetkých účastníkov ostro monotónne, potom je rovnovážny vektor kladných cien riešením systému n homogénnych rovníc o n neznámych

$$z(p) = 0.$$

Walrasov zákon hovorí, že rovnice sú závislé, teda ak vektor cien rieši $n-1$ rovníc, rieši všetky.

Dôkaz. Nech $z_{j_0}(p^*) < 0$. Ak by platilo $p_{j_0} \neq 0$, potom by z Walrasovho zákona vyplývalo

$$0 = \langle p^*, z(p^*) \rangle = \sum_{j=1}^{n} p_j^* z_j(p^*) \leq p_{j_0}^* z_{j_0}^*(p^*) < 0,$$

čo je spor. □

Príklad. Predpokladajme $n = N = 2$,

$$u^{(1)}(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$
$$u^{(2)}(x_1, x_2) = x_1^{\beta} x_2^{1-\beta}.$$

Ak $p = (p_1, p_2)$ je vektor cien statkov, riešením základnej úlohy (2.1), (2.2) z Kapitoly 2 pre prvého účastníka dostaneme jeho Marshallovskú dopytovú funkciu

$$m_1^{(1)}(p, I) = \frac{\alpha I}{p_1},$$
$$m_2^{(1)}(p, I) = \frac{(1-\alpha) I}{p_2},$$

Ak za I dosadíme jeho príjem $p_1\omega_1^{(1)} + p_2\omega_2^{(1)}$, dostaneme

$$m_1^{(1)}(q) = \alpha[\omega_1^{(1)} + q\omega_2^{(1)}],$$
$$m_2^{(1)}(q) = (1-\alpha)[q^{-1}\omega_1^{(1)} + \omega_2^{(1)}],$$

kde $q = p_2/p_1$. Analogickým postupom dostaneme Marshallovskú dopytovú funkciu druhého účastníka

$$m_1^{(2)}(q) = \beta[\omega_1^{(2)} + q\omega_2^{(2)}],$$
$$m_2^{(2)}(q) = (1-\beta)[q^{-1}\omega_1^{(2)} + \omega_2^{(2)}],$$

Keďže funkcie užitočnosti obidvoch účastníkov sú ostro monotónne, v rovnováhe platí

$$m_1^{(1)}(q) + m_1^{(2)}(q) = \omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)},$$
$$m_2^{(1)}(q) + m_2^{(2)}(q) = \omega_2^{(1)} + \omega_2^{(2)},$$

teda

$$\alpha[\omega_1^{(1)} + q\omega_2^{(1)}] + \beta[\omega_1^{(2)} + q\omega_2^{(2)}] = \omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)},$$
$$(1-\alpha)[q^{-1}\omega_1^{(1)} + \omega_2^{(1)}] + (1-\beta)[q^{-1}\omega_1^{(2)} + \omega_2^{(2)}] = \omega_2^{(1)} + \omega_2^{(2)},$$

Keďže podľa Walrasovho zákona sú rovnice závislé (o čom sa môžeme presvedčiť priamo), môžeme z ktorejkoľvek z nich jednoznačne vypočítať pomer cien

$$q = \frac{(1-\alpha)\omega_1^{(1)} + (1-\beta)\omega_1^{(2)}}{\alpha\omega_2^{(1)} + \beta\omega_2^{(2)}}.$$

5.2 Existencia rovnováhy

Pretože $z(p) = z(kp)$ pre každé $k > 0$, môžeme rovnovážnu cenu hľadať medzi cenovými vektormi z množiny $S = \{p : p_i \geq 0, \sum p_i = 1, \}$. V prípade, že sú Marshallovské dopytové funkcie účastníkov definované aj pre nulové ceny, je éxistencia rovnováhy dôsledkom nasledujúcej vety:

Veta 5.2. *Nech $z\colon S \to \mathbb{R}^N$ je spojitá funkcia taká, že $\langle p, z(p)\rangle = 0$ pre každé p. Potom existuje $p \in S$ také, že $z(p) \leq 0$.*

Dôkaz je netriviálny a využíva **Brouwerovu vetu o pevnom bode.** *Nech K je konvexná kompaktná množina a $f : K \to K$ je spojitá. Potom f má pevný bod.*

Existencia $p \in S$ takého, že $z(p) \leq 0$ vyplynie z tejto vety takto:

Definujeme $f\colon S \to S$ predpisom

$$f_i(p) = \frac{p_i + \max\{0, z_i(p)\}}{1 + \sum_{j=1}^n \max\{0, z_j(p)\}} \qquad \left(= \frac{p_i + \max\{0, z_i(p)\}}{\sum_j [p_j + \max\{0, z_j(p)\}]}\right)$$

f je spojitá a preto má pevný bod p^*, $f_i(p^*) = p_i^*$ značí

$$p_i^* + \max\{0, z_i(p^*)\} = p_i^* + p_i^* \sum_{i=1}^n \max\{0, z_i(p^*)\}.$$

Vynásobením rovníc $z_i(p_i^*)$ a ich sčítaním dostaneme

$$\sum_{i=1}^n z_i(p^*) \max\{0, z_i(p^*)\} = \sum_{i=1}^n z_i(p^*) p_i^* \sum_{i=1}^n \max\{0, z_i(p^*)\}.$$

Pretože $\sum_{i=1}^{n} z_i(p^*)p_i^* = \langle z(p^*), p^*\rangle = 0$, platí

$$\sum_{i=1}^{n} z_i(p^*)\max\{0, z_i(p^*)\} = 0. \tag{5.3}$$

Platí $z_i(p^*)\max\{0, z_i(p^*)\} \geq 0$ a $z_i(p^*)\max\{0, z_i(p^*)\} > 0$ ak $z_i(p^*) > 0$ Ľavá strana (5.3) je teda súčet nezáporných čísel a ten môže byť nulový iba ak sú všetky sčítance rovné nule, čo je práve vtedy, ak platí

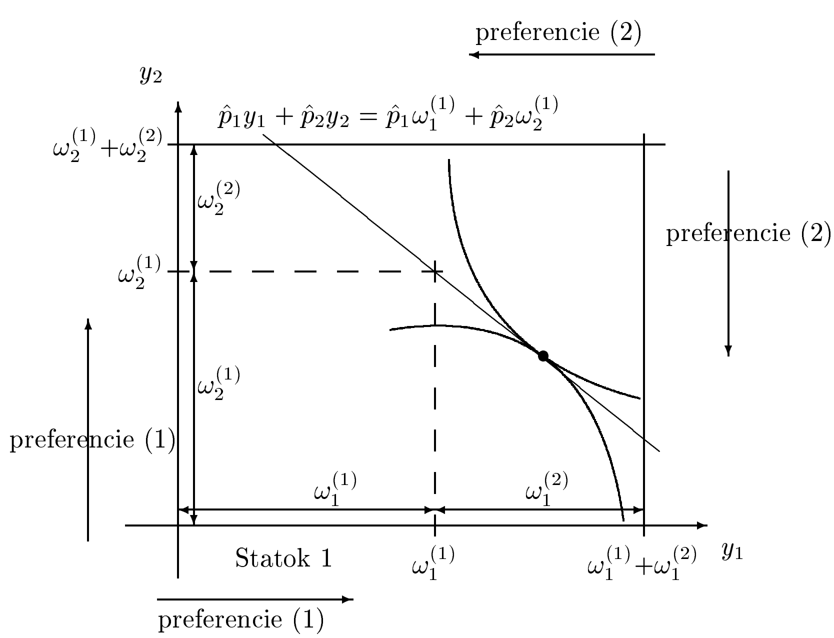
$$z_i(p^*) \leq 0 \qquad \text{pre všetky } i.$$

Geometrický význam konštrukcie je taký, že zobrazenie $P(z)$, definované predpisom $P_i(z) = \max\{0, z_i(p^*)\}$ je projekciou $z(p)$ na $\mathbb{R}_+^n = \{x \geq 0\}$, a zobrazenie $p \to \left\{\frac{p_i+P_i(z)}{\sum(p_i+P_i(z))}\right\}$ je projekciou vektora $f(p) = p + P(z(p))$ na simplex S pozdĺž lúčov z počiatku; $P(z(p)) \leq 0$ práve vtedy, ak $z(p) \leq 0$.

Veta má obmedzené použitie, mnohé často používané dopytové funkcie (napr. odvodené z Cobbovej-Douglasovej, alebo CES funkcie užitočnosti) jej predpokladom nevyhovujú. Existencia riešenia za všeobecnejších predpokladov, zahŕňajúcich aj uvedené funkcie sa dá dokázať s pomocou Kakutaniho vety o pevnom bode pre funkcie s množinovými hodnotami (pozri [4])

5.3 Edgeworthov obdĺžnik

Úlohu výmeny dvoch tovarov dvoma účastníkmi trhu možno demonštrovať na Edgeworthovom obdĺniku



Obr. 18. Edgeworthov obdĺžnik

1. Dĺžky strán obdĺžnika predstavujú celkové množstvá statkov na trhu.
2. Bod (x_1, x_2) obdĺžnika prestavuje takú alokáciu týchto množstiev medzi účastníkmi, že účastník $\boxed{1}$ má x_i a účastník $\boxed{2}$ má $\omega_i^{(1)} + \omega_i^{(2)} - x_i$ i-teho statku.
3. Priamka

$$\langle p, x\rangle = \langle p, \omega^{(1)}\rangle, \tag{5.4}$$

prechádzajúca bodom $(\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)})$ predstavuje množinu takých spotrebných košov, ktoré si môže z príjmu z predaja vybavenia dovoliť účastník $\boxed{1}$. Pre tieto body však súčasne platí

$$\langle p, \omega^{(1)} + \omega^{(2)} - x\rangle = \langle p, \omega^{(2)}\rangle$$

a preto reprezentuje (v súradnicovom systéme s počiatkom v bode $\omega^{(1)} + \omega^{(2)}$ a opačne orientovanými osami) aj analogickú množinu pre druhého účastníka.

4. Cenový vektor je rovnovážny vtedy, ak sa na priamke (5.4) nájde bod, ktorý rieši úlohu rovnováhy spotrebiteľa pre obidvoch spotrebiteľov. Nutnou podmienkou je, aby sa priamka (5.4) v tomto bode dotýkala čiary indiferentnosti obidvoch účastníkov. Veta z odseku 5.2 tvrdí, že takýto cenový vektor existuje, ak sú Marshallovské dopytové funkcie obidvoch účastníkov spojité.

Systemtické grafické spracovanie Edgeworthovho obdĺžnika sa nachádza v [11].

Príklad (Zameniteľné statky)**.** Ak sú statky 1, 2 pre obidvoch účastníkov trhu zameniteľné a x_1, x_2 sú množstvá statkov, ktoré sú alokované na prvého účastníka , potom pre užitočnosti účastníkov trhu platí

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x_1, x_2) &= a_1 x_1 + a_2 x_2 \\ u^{(2)}(x_1, x_2) &= b_1(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)} - x_1) + b_2(\omega_2^{(1)} + \omega_2^{(2)} - x_2) \end{aligned}$$

a spoločná rozpočtová priamka obidvoch účastníkov je

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = I^{(1)} = p_1 \omega_1^{(1)} + p_2 \omega_2^{(1)}.$$

Označme $q = \frac{p_2}{p_1}$. Technikami z Kapitol 1, 2 vypočítame Marshallovské dopytové funkcie účastníkov:

$$m^{(1)}(p) = \begin{cases} (\omega_1^{(1)} + q\omega_2^{(1)}, 0) & \text{ak } q > a_2/a_1, \\ (0, q^{-1}\omega_1^{(1)} + \omega_2^{(1)}) & \text{ak } q < a_2/a_1 \end{cases}$$

$$m^{(2)}(p) = \begin{cases} (\omega_1^{(2)} + q\omega_2^{(2)}, 0) & \text{ak } q > b_2/b_1, \\ (0, q^{-1}\omega_1^{(2)} + \omega_2^{(2)}) & \text{ak } q < b_2/b_1. \end{cases}$$

Bez újmy na všeobecnosti predpokladajme $a_2/a_1 \geq b_2/b_1$. Potom platí

$$m^{(1)}(q) + m^{(2)}(q) = \begin{cases} (\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)} + q(\omega_2^{(1)} + \omega_2^{(2)}), 0) & \text{ak } q > a_2/a_1 \\ (\omega_1^{(2)} + q\omega_2^{(2)}, q^{-1}\omega_1^{(1)} + \omega_2^{(1)}) & \text{ak } a_2/a_1 > q > b_2/b_1 \\ (0, q^{-1}(\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)}) + \omega_2^{(1)} + \omega_2^{(2)} & \text{ak } q < b_2/b_1 \end{cases}$$

Ak $q = a_2/a_1$ (resp. $q = b_2/b_1$), dopyt prvého účastníka nie je na rozpočtovej priamke určený, určíme ho pomocou dopytu druhého (resp. prvého) účastníka. Zhrnutím všetkých možností dostávame, že rovnovážny pomer cien je daný formulou

$$q = \begin{cases} a_2/a_1 & \text{ak } \omega_1^{(1)}/\omega_2^{(2)} > a_2/a_1 \\ \omega_1^{(1)}/\omega_2^{(2)} & \text{ak } a_2/a_1 \geq \omega_1^{(1)}/\omega_2^{(2)} \geq b_2/b_1 \\ b_2/b_1 & \text{ak } \omega_1^{(1)}/\omega_2^{(2)} < b_2/b_1. \end{cases}$$

Podrobné odvodenie sa ponecháva na čitateľa, možno ho nájsť v [7].

Všimnime si, že rovnováha existuje napriek tomu, že Marshallovské dopytové funkcie účastníkov nie sú spojité a teda predpoklady existenčnej vety nie sú splnené.

5.4 Prvá veta o dobrodení (welfare)

Výmenu môžeme chápať ako hru, v ktorej stratégiami sú koše statkov, spĺňajúce rozpočtové ohraničenie a výplatou je hodnota funkcie užitočnosti. Pripomeňme si, že súbor stratégií hráčov nazývame *Paretovsky optimálnym*, ak nieexistuje iný súbor stratégií, prí ktorom by výplata nijakého z hráčov nebola nižšia, kým výplata aspoň jedného z nich by bola vyššia.

Prvá veta o dobrodení hovorí, že alokácia statkov pri rovnováhe je Paretovsky optimálna. Vyplýva to priamo z definície rovnováhy.

Táto veta azda najviac charakterizuje filozofiu klasickej ekónomie: hoci sa všetci účastníci trhu správajú sebecky, výsledkom je taká alokácia statkov, ktorá je pre všetkých optimálna.

5.5 Produkcia

V základnom modeli sme nepočítali s produkciou statkov. Predpokladajme, že je n výrobcov, j-ty výrobca vyrába práve j-ty statok a statky $1, \ldots, n$ (vrátane statku j) sú pre neho faktormi. V zmysle odseku 1.2 ho charakterizujeme produkčnou funkciou $f^{(j)}$. Predpokladajme, že pri danom vektore cien p v zmysle odseku 1.4 výrobca maximalizuje svoj zisk, t. j. volí vektor faktorov $\hat{x}^{(j)}$ tak, aby platilo

$$p_j f^{(j)}(\hat{x}^{(j)}) - \langle p, \hat{x}^{(j)} \rangle \geq p_j f^{(j)}(x) - \langle p, x \rangle$$

pre všetky $x \geq 0$. Označíme

$$\hat{y}^{(j)} = (-x_1^{(j)}, \ldots, f^{(j)}(\hat{x}^{(j)}) - x_j^{(j)}, \ldots - x_n^{(j)})$$

čistý vektor produkcie j-teho výrobcu (záporné hodnoty produkcie predstavujú spotrebu faktorov).

Predpokladáme, že výrobcovia sú vlastnení spotrebiteľmi ako akcionármi. Označme a_{ij} – podiel i-teho spotrebiteľa v j-tom výrobcovi

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij} = 1$$

Rozpočtové ohraničenie i-teho spotrebiteľa bude

$$\langle p, x^{(i)} \rangle = \langle p, \omega^{(i)} \rangle + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \langle p, \hat{y}^{(j)} \rangle$$

kde $\hat{y}^{(j)}(p)$ je produkčný plán, maximalizujúci zisk j-teho výrobcu.

Podobne ako pri trhu bez produkcie hľadáme p tak, aby sa nevyskytol neuspokojený dopyt, t.j.

$$z(p) = \sum_{i=1}^{N} \left[m^{(i)}(p, \langle p, \omega^{(i)} \rangle + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \langle p, \hat{y}^{(j)} \rangle \right] - \sum_{i=1}^{N} \omega^{(i)} - \sum_{j=1}^{n} \hat{y}^{(j)}(p) \leq 0.$$

Ľahko si môžeme overiť, že ak majú všetci účastníci ostro monotónne preferencie, pre $z(p)$ opäť platí Walrasov zákon. Dá sa dokázať, že za rozumných predpokladov existuje rovnovážny cenový vektor.

Walrasov model je základom pre zložitejšie modely všeobecnej rovnováhy, ktoré sa používajú aj v ekonomickej prognostike.

5.6 Externality a vlastnícke práva

Doteraz sme predpokladali, že spotreba statku jedným z účastníkov trhu je ostatným účastníkom ľahostajná, nemá vplyv na hodnotu ich funkcie užitočnosti. To nemusí by pravda. Vplyvy spotreby ostatných subjektov na užitočnosť daného subjektu nazývame *externalitami.* Exernality môžu byť

- *negatívne*, ak zvýšenie spotreby jedným účastníkom znižuje užitočnosť iného (napr. fajčiar – čistý vzduch, hlasná hudba – ticho, parkoviská – zeleň, stavby na susedných pozemkoch) alebo
- *pozitívne* v opačnom prípade (ovocný sad – včelár, upravená záhrada). Rozsiahlou triedou pozitívnych externalít sú *sieťové* externality. Napríklad účastník facebooku zvyšuje svojou účasťou a aktivitou okrem svojej užitočnosti aj užitočnosť ostatných účastníkov.

Externalita sa môže z pozitívnej zmeniť rozsahom na negatívnu. Napríklad väčší počet automobilov vedie k hustejšej sieti služieb, ale priveľký počet zasa k dopravným zápcham.

Rovnako môžeme hovoriť o produkčných externalitách negatívnych (výroba elektriny – znečistenie ovzdušia, riek) a pozitívnych (chov oviec – hnojenie lúk).

Možno povedať, že v prípade negatívnej externality statok pre jedného účastníka je „antistatkom“ pre druhého, t. j. užitočnosť s nárastom jeho „spotreby“ klesá. Situáciu môžeme opäť znázorniť na Edgeworthovom obdĺžniku, v ktorom jedným zo statkov sú „peniaze“ (reprezentujúce spotrebu ostatných statkov), hodnotu vybavenia ktorými označíme $\omega_1^{(i)}$. Na druhú os nanášame spotrebu druhého statku (pri fajčení cigarety pre jedného, dym pre druhého.)

Trh nemôže viesť v prípade externalít k rovnováhe preto, že nie je dané vybavenie v účastníkov v zvislom statku/antistatku. „Vybavenie“ môže nahradiť vrchnosť určením *vlastníckych práv.* Napr. v prípade fajčiarov: ak vrchnosť určí, že v miestnosti sa nefajčí, je statkom vybavený účastník $\boxed{2}$, ak určí, že sa celý čas môže fajčiť, účastník $\boxed{1}$. Vrchnosť môže určiť aj medzistupeň (v časti reštaurácie sa fajčí, v časti nie, vlak má fajčiarske a nefajčiarske vozne). Napríklad v prípade fajčenia sa vlastnícke práva postupne menili v prospech nefajčiarov, v prípade vlastníkov stavebných pozemkov definuje ich vlastnícke práva územný plán.

Príklad. Nech x_1 predstavuje peniaze, x_2 – počet hodín hudby za 24 hod. Účastník 1 chce počúvať hudbu, účastník 2 preferuje ticho.

Počiatočné vybavenie nech je

$$\begin{aligned} \omega_1^{(1)} &= 100, \qquad & \omega_1^{(2)} &= 100 \\ \omega_2^{(1)} &= a, & \omega_2^{(2)} &= 24 - a, \end{aligned}$$

kde parameter a reprezentuje právo na hodiny ticha. Rozpočtová priamka prvého účastníka je

$$x_1^{(1)} + p_2 x_2^{(1)} = 100 + p_2 a,$$

predpokladajme, že funkcie užitočnosti účastníkov sú

$$\begin{aligned} u^{(1)}(x_1, x_2) &= x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} \\ u^{(2)}(x_1, x_2) &= x_1^{\beta} x_2^{1-\beta}. \end{aligned}$$

Rovnovážnu cenu dostaneme postupom z príkladu v odseku 5.1

$$p_2 = \frac{(2 - \alpha - \beta)100}{\alpha a + \beta(24 - a)}.$$

Príklad (Tragédia občiny)**.** Predpokladajme, že na spoločnej pastvine („občine, commons“) pasú viacerí pastieri svoje stáda kráv. Nech cena chovu jednej kravy je a a $f(x)$ je celkový výnos z mlieka, vyrobeného stádom veľkosti x, pasúceho sa na pastvine. Predpokladajme, že f je ostro rastúca ostro konkávna a platí $f(0) = 0$.

Zisk z chovu stáda veľkosti x je

$$\pi(x) = f(x) - ax,$$

jeho maximum sa dosahuje v (jednoznačne definovanom) bode X takom, že

$$f'(X) = a.$$

Predpokladajme teraz, že na pastvine pasie kravy N vlastníkov a veľkosti ich stád sú $x_1, \ldots, x_N$. Výnos zo stáda k-teho pastiera je rovný celkovému výnosu vynásobenému pomerom veľkosti jeho stáda k veľkosti celého stáda, pasúceho sa na pastvine, teda

$$\frac{x_k}{x_1 + \cdots + x_N} f(x_1 + \cdots + x_N)$$

a jeho zisk bude

$$\pi_k(x_k) = \frac{x_k}{x_1 + \cdots + x_N} f(x_1 + \cdots + x_N) - ax_k.$$

Predpokladajme, že jednotlivý pastier nemá vplyv na veľkosti stád ostatných pastierov. Vtedy bude maximum zisku dosahovať pri veľkosti svojho stáda $\hat{x}_k$ takej, že $\pi'_k(x_k) = 0$, t. j.

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{x_1 + \cdots + \hat{x}_k + \cdots + x_N} - \frac{\hat{x}_k}{(x_1 + \cdots + \hat{x}_k + \cdots + x_N)^2}\right) f(x_1 + \cdots + \hat{x}_k + \cdots + x_N)\\ &+ \frac{\hat{x}_k}{x_1 + \cdots + \hat{x}_k + \cdots + x_N} f'(x_1 + \cdots + \hat{x}_k + \cdots + x_N) = a.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Predpokladajme ďalej zjednodušene, že pastieri sú identickí. Vtedy $\hat{x}_1 = \cdots = \hat{x}_N = Y/N$, kde Y je celková veľkosť stáda. Potom môžeme (5.8) prepísať do tvaru

$$\left(\frac{1}{Y} - \frac{Y/N}{Y^2}\right) f(Y) + \frac{1}{N} f'(Y) = a,$$

alebo

$$\left(1 - \frac{1}{N}\right) \frac{f(Y)}{Y} + \frac{1}{N} f'(Y) = a.$$

Z predpokladov na funkciu f vyplýva $\frac{f(Y)}{Y} > f'(Y)$. Aby sme to dokázali, vyšetríme funkciu $F(Y) = f(Y) - Yf'(Y)$ – pre $Y > 0$ totiž zrejme platí $\frac{f(Y)}{Y} > f'(Y)$ práve vtedy ak $F(Y) > 0$.

Platí $\lim_{Y \to 0}$ F(Y)= 0. Pretože f je rastúca a konkávna, platí

$$F'(Y) = f'(Y) - f'(Y) - Yf''(Y) = -Yf''(Y) > 0.$$

Z týchto dvoch vzťahov vyplýva $F(Y) > 0$ pre $Y > 0$.

Keďže $\frac{f(Y)}{Y} > f'(Y)$, platí

$$a > \left(1 - \frac{1}{N}\right) f'(Y) + \frac{1}{N} f'(Y) = f'(Y);$$

keďže f' je klesajúca funkcia, vyplýva z toho $Y > X$; čím je N väčšie, tým väčšie je Y.

To znamená, že čím je väčší počet jednotlivých pastierov, tým viac budú pastvinu prepásať, t. j. pásť viac, než by bolo spoločensky optimálne. Toto je jednou z príčin tragického vývoja v Saheli, suchého pásma Afriky južne od Sahary.

5.7 Produkčné externality

Predstavme si, že papiereň vyrába mnostvo q papiera a množstvo x znečistenia vypustí do rieky. Produkcia rybárskeho združenia je negatívne ovplyvnená znečistením.

Nákladové funkcie papierne a rybárskeho združenia sú $C_P(q,x)$ a $C_R(r,x)$, kde r je množstvo vylovených rýb. Platí

$$\frac{\partial C_R}{\partial x} > 0, \qquad \frac{\partial C_P}{\partial x} \leq 0.$$

Nech p_q, p_r sú jednotkové ceny papieru resp. rýb. Rovnováha papierne je

$$p_q q - C_P(q,x) \to \max$$

a rybárskeho združenia

$$p_r r - C_R(r,x) \to \max$$

V rovnováhe platí

$$\begin{aligned} p_q &= \frac{\partial C_P}{\partial q}(\hat{q},\hat{x}), \\ 0 &= \frac{\partial C_P}{\partial x}(\hat{q},\hat{x}), \\ p_r &= \frac{\partial C_R}{\partial r}(r,\hat{x}). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Znečistenie reprezentované premennou x predstavuje pre rybárov externalitu – znižuje ich produkciu, ale sami ho nemôžu ovplyvniť. Zvýšenie nákladov rybárov je časť *spoločenskej ceny* papiera, ktorú papiereň ignoruje. Všimnime si, že podľa rovnice (5.6) papiereň bude znečisťovať tak, aby čistenie nepredstavovalo pre ňu nijaké (hraničné) náklady.

Jednou možnosťou Paretovsky optimálneho riešenia je, že by sa firmy zlúčili do jednej. Potom by spoločný zisk bol

$$p_q q + p_r r - C_P(q,x) - C_R(r,x)$$

a rovnica (5.6) pre maximum by sa nahradila rovnicou

$$\frac{\partial C_P}{\partial x}(\hat{q},\hat{x}) + \frac{\partial C_R}{\partial x}(\hat{r},\hat{x}) = 0. \tag{5.7}$$

Vzhľadom na znamienka $\frac{\partial C_P}{\partial x}$, $\frac{\partial C_R}{\partial x}$ by to prinieslo menšie znečistenie.

Vrchnosť môže prinútiť papiereň uhradiť spoločenskú cenu znečistenia pomocou *Pigouovej dane* t za jednotku znečistenia výšky

$$t = \frac{\partial C_R}{\partial x}(\hat{r},\hat{x}).$$

Vtedy bude papiereň v rovnováhe, ak

$$p_q q - C_P(q,x) - tx \to \max,$$

teda

$$\frac{\partial C_P}{\partial x}(\hat{q},\hat{x}) = -t,$$

čo vedie k rovnakej úrovni znečistenia ako (5.7)

Ďalšou možnosťou je *trhové riešenie*. Povedzme, že papiereň má povolenú normu $\overline{x}$ („vlastnícke právo") a rybári sú ochotní platiť jej, aby znečisťovala menej, a to ρ za jednotku. Papiereň maximalizuje svoj zisk,

$$p_q q + \rho(\overline{x} - x) - C_P(q,x) \to \max,$$

jej rovnováha je riešením rovníc

$$p_q = \frac{\partial C_P}{\partial q}(\hat{p}, \hat{x}), \qquad -\rho = \frac{\partial C_P}{\partial x}(\hat{p}, \hat{x}). \tag{5.8}$$

Podobne, podmienkou maxima zisku rybárov

$$p_r r - \rho(\overline{x} - x) - C_R(r, x) \to \max$$

je

$$p_r = \frac{\partial C_R}{\partial r}(r, x), \qquad \rho = \frac{\partial C_R}{\partial x}(r, x) \tag{5.9}$$

Z (5.8), (5.9) dostaneme

$$\frac{\partial C_R}{\partial x}(q, x) = -\frac{\partial C_P}{\partial x}(r, x) = \rho.$$

Vidíme, že spoločenské optimum je opäť rovnaké, ako keby sa firmy zlúčili do jednej. Úroveň znečistenia od $\overline{x}$ nezávisí, závisí však od neho rozdelenie ziskov.

Ak je viac znečisovateľov (napr. znečistenie ovzdušia emisiami NO elektrárňami), vrchnosť môže určiť normy na znečistenie bez ohľadu na náklady jednotlivých firiem. Existuje aj flexibilnejšie, trhové riešenie.

Nech sú náklady n firiem na dosiahnutie hladiny znečistenia x $C_1(x), \ldots, C_n(x)$. Spoločenské optimum minimalizácie nákladov je

$$C_1(x_1) + \cdots + C_n(x_n) \to \min$$

za podmienky

$$x_1 + x_2 + \ldots x_n \leq \overline{x}. \tag{5.10}$$

Keďže funkcie $C_i(x), i = 1 \ldots n$ sú klesajúce, ak minmum $\widehat{x_1}, \ldots, \widehat{x_1}$ existuje, dosahuje sa pri rovnosti v (5.10). Pomocou Lagrangeovej ve dostávame

$$C_1'(\widehat{x_1}) = \lambda, \ldots, C_n'(\widehat{x_n}) = \lambda,$$

teda

$$C_1'(\widehat{x_1}) = \cdots = C_n'(\widehat{x_n}).$$

Toto riešenie sa v súčasnosti uplatňuje na medzištátnej úrovni. Štáty majú určenú hranicu znečistenia, môžu si však jej zvýšenie „odkúpiť“ od iného štátu, ktorý plní stanovený limit s rezervou.

5.8 Cvičenia

5.1. Dvaja účastníci trhu s dvoma statkami majú funkcie užitočnosti $u^{(1)}(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$, $u^{(2)}(x_1, x_2) = x_1 x_2$ a sú vybavení jednou jednotkou z každého zo statkov. Vypočítajte Walrasovsky rovnovážny podiel cien a spotreby jednotlivých statkov jednotlivými účastníkmi.

5.2. Romeo a Júlia spotrebúvajú 2 statky 1, 2, ich funkcie užitočnosti sú $u^R(x_1, x_2) = x_1 x_2$ a $u^J(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$. Romeo má pôvodne 3 jednotky statku 1 a 4 jednotky statku 2, Júlia 7 jednotiek statku 1 a 6 jednotiek statku 2. Ako si podelia statky vo Walrasovej rovnováhe?

5.3. Corgoň a Topvar sú pre Petra a Luciu dokonale substitučné tovary s funkciami užitočnosti

$$u_P(C,T) = 2C + T$$
$$u_L(C,T) = C + 2T.$$

Ak Peter a Lucia majú po base z každého druhu piva, aká spotreba Corgoňa resp. Topvaru pripadne vo Walrasovej rovnováhe na Petra a aká na Luciu?

5.4. Overte Walrasov zákon pre trh s produkciou.

5.5. Castor a Polux žijú v svete dvoch statkov x_1, x_2. Ich funkcie užitočnosti sú

$$u^C(x_1,x_2) = x_1^r x_2^r \qquad r > 0$$
$$u^P(x_1,x_2) = \min\{x_1, x_2\}.$$

Castor vlastní 3 jednotky x_1 a 4 jednotky x_2, Polux vlastní 7 jednotiek x_1 a 6 jednotiek x_2. Ktorá z odpovedí správne charakterizuje Walrasovu rovnováhu:
a) Obidvaja spotrebúvajú 5 jednotiek.
b) Polux spotrebúva 6 jednotiek z každého statku, lebo spotreba siedmej jednotky ľubovoľného zo statkov nevedie k nárastu jeho funkcie užitočnosti
c) Polux spotrebúva rovnaké množstvá obidvoch statkov, preto sa ich ceny musia rovnať.
d) Ceny statkov sa nerovnajú, lebo Castor a Polux nie sú rovnako vybavení.
e) Všetky odpovede sú nesprávne.

5.6. Ivan donesie na trh kilo maku, Brigita kilo orechov. Predpokladajme, že ich funkcie užitočnosti sú

$$u_I(m,o) = m + 2o$$
$$u_B(m,o) = 2m + 3o.$$

Aké musia byť ceny maku p_m a orechov p_o, aby Ivan aj Brigita uspokojili svoj dopyt? Koľko si donesú z trhu maku resp. orechov?

5.7. Stürzer pečie krémeše, Levius pajgle. Každý z nich napiekol po sto kusoch. Stürzerova funkcia užitočnosti je

$$u_S(K,P) = KP$$

Leviusova

$$u_L(K,P) = 2K + P.$$

Pri akom pomere cien budú obidvaja uspokojení?

5.8. Knieža Biatec potrebuje meď s cínom v pomere 3 : 1 na bronz na svoje mince, jeho funkcia užitočnosti je teda

$$u_B(m,c) = \min\{m, 3c\}.$$

Miesiželezo si z bronzu a cínu pripravuje šalát a jeho funkcia užitočnosti je

$$u_M(m,c) = mc.$$

Biatec má 10 kg cínu a nijakú meď, Miesiželezo 20 kg medi a nijaký cín. Pri akom pomere cien budú dopyty obidvoch uspokojené a koľko si odnesú medi resp. cínu?

5.9. Aristid má kilo chleba, Tasillo pol kila slaniny. Ich funkcie sú

$$u_A(c,s) = c^{1/2}s$$
$$u_T(c,s) = cs.$$

Pri akom pomere cien budú dopyty obidvoch po slanine i chlebe uspokojené?

5.10. Jožovi a Mišovi nabalili mamy na lyžovačku po pol kile mandarínok a pomarančov. Ich funkcie užitočnosti sú $u_J(x_m, x_p) = x_m + x_p$, $u_M(x_m, x_p) = 2x_m + x_p$. (M – Mišo, J – Jožo, m – mandarínky, p – pomaranče). Mišo a Jožo si zobchodujú pomaranče a mandarínky tak, aby maximalizovali svoju užitočnosť. Aké budú vo Walrasovej rovnováhe spotrebúvať množstvá p a m a aké budú ich rovnovážne ceny?

5.11. V svete dvoch statkov x_1, x_2 je funkcia užitočnosti Petra $u(x_1, x_2) = x_1x_2$ a funkcia užitočnosti Pavla $u(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$. Peter má pôvodne 5 jednotiek x_1 a 9 jednotiek x_2, Pavel má 6 jednotiek x_1 a 8 jednotiek x_2. Koľko jednotiek x_1, x_2 spotrebúva vo Walrasovej rovnováhe tejto ekonómie Peter?

5.12. Lev Nikolajevič a Josif Visarionovič pália vodku a vo voľnom čase lovia seľjodku. V sobotu sa zišli, aby si povymieňali výrobky a úlovky. Ak Lev Nikolajevič príde vybavený pol litrom, Josif Visarionovič litrom vodky a obidvaja z nich sú po vypití pol litra vodky stuhnutí (t. j. ich spoločný Marshallovský dopyt po vodke pri jej nulovej cene je liter), koľko spotrebujú v súčte vo Walrasovej rovnováhe?

5.13. Čutora obľubuje ako jedlo grenadír, ale iba v pomere zemiaky : cestoviny = 1 : 2. Naopak, Butora jedáva zemiaky i cestoviny k mäsu, ale zemiaky sú mu milšie, čo je vyjadrené jeho funkciou užitočnosti

$$u_B(z,c) = 2z + c.$$

Čutora donesie na trh 10 kg cestovín, Butora po 5 kg zemiakov i cestovín. Pri akom pomere cien zemiakov a cestovín sa obidvaja vrátia domov spokojní?

5.14. Dokončite analýzu riešenia príkladu z odseku 5.3.

5.15. Marcello vyrába ravioli, Sophia tortellini, na trh prídu vybavení 10 kg svojich výrobkov. Čo do spotreby sú ravioli a tortellini pre Marcella celkom zameniteľné, kým Sophia ich radšej strieda, takže ich funkcie užitočnosti sú

$$u_M(R,T) = R + T,$$
$$u_S(R,T) = R^{2/3}T^{1/3}.$$

Ak obidvaja maximalizujú svoju užitočnosť, pri akom pomere cien je sú ich dopyty uspokojené a s akými množstvami odídu z trhu?

5.16. Funkcie užitočnosti účastníkov trhu sú

$$u^{(1)}(x_1,x_2) = \min\{x_1, x_2\},$$
$$u^{(2)}(x_1,x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}.$$

Predpokladajme $2(\omega_2^{(1)} + \omega_2^{(2)}) > \omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)} > \omega_2^{(1)} + \omega_2^{(2)}$. Rozhodnite, pri akých hodnotách $\omega_1^{(1)}, \omega_1^{(2)}, \omega_2^{(1)}, \omega_2^{(2)}$ má Walrasova úloha riešenie s nenulovými cenami a ukážte, že pomer cien je určený jednoznačne.

5.17. Dvaja účastníci trhu s dvoma statkami majú funkcie užitočnosti

$$u^1(x_1,x_2) = \min\{x_1, x_2\}, \qquad u^2(x_1,x_2) = \min\{x_1, x_2\}$$

a počiatočné vybavenie:
a) $\omega^1 = (2,1)$, $\omega^2 = (0,1)$
b) $\omega^1 = (1,1)$, $\omega^2 = (0,1)$.
Existuje Walrasova rovnováha s nenulovými cenami? Ak áno, vypočítajte rovnovážny pomer cien a spotrebu statkov.

5.18. Dvaja účastníci trhu s dvoma statkami majú počiatočné vybavenie $\omega^1 = (1,1)$, $\omega^2 = (1,1)$ a funkcie užitočnosti
a) $u^1(x_1, x_2) = \min\{2x_1, x_2\}$,
b) $u^2(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$,
$u^1(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$, $u^2(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$.
Existuje Walrasova rovnováha s nenulovými cenami? Ak áno, vypočítajte rovnovážny pomer cien a spotrebu statkov.

6 Neistota a riziko

6.1 Lotéria ako model rozhodovania pri neistote

Dosiaľ sme teóriu trhu robili za predpokladu úplnej istoty v dôsledkoch rozhodovania. V skutočnosti však spotrebiteľovi, obchodníkovi, alebo výrobcovi nemusia by známe exogénne podmienky, ktoré môžu ovplyvniť dôsledky jeho rozhodnutia.

Napríklad:

- objednám si dovolenku a neviem, aké bude počasie
- orazítkujem si obed, neviem či naň budem môcť ísť
- kúpim zasnežovacie delo, neviem aká bude sezóna
- prenajmem si miesto na predaj na púti, neviem koľko príde ľudí
- zasejem pšenicu, neviem, ako mi zarodí.

Budeme sa najprv zaoberať neistotou spotrebiteľa, pre jednoduchosť sa obmedzíme na jeden statok (peniaze) a rozhodovanie pri neistote budeme modelovať ako *lotériu.*

Predpokladajme, že spotrebiteľ má *imanie* 100 Sk a za 5 Sk si kúpi lístok do lotérie, v ktorej môže vyhrať 200 Sk, ak mu vyjde číslo, na ktoré stavil, inak ich stratí. Jeho voľba spočíva v tom, či staví (S), alebo nie (N). Výsledkom je jeho imanie po ťahu lotérie:

N: po lotérií má s istotou 100 Sk

S: po lotérii môže mať 95, alebo 295 Sk.

Ak je pravdepodobnosť jeho výhry p, potom je toto imanie náhodnou premennou s rozdelením

$$100 \text{ s pravdepodonosťou } 1$$

v prvom,

$$\begin{aligned} 95 &\text{ s pravdepodobnosťou } 1-p \\ 295 &\text{ s pravdepodobnosťou } p \end{aligned}$$

v druhom prípade. Rozhodovanie spočíva vo voľbe náhodnej premennej z danej množiny náhodných premenných $V = \{N, S\}$.

Racionálne rozhodovanie modelujeme ako maximalizáciu preferencií na množine V, v našom príklade dvojprvkovej. Ak subjekt volí istotu, hovoríme o *averzii k riziku*, v opačnom prípade o *vyhľadávaní rizika.*

6.2 Averzia k riziku a poistenie

Protipólom príkladu z predchádzajúceho odseku je situácia, v ktorom subjekt je prirodzene konfrontovaný s rizikom a snaží sa mu vyhnúť. Typicky to robí s pomocou poistenia.

Predpokladajme, že subjekt vlastní objekt za 350000 Sk, z ktorého môžu ukradnúť zariadenie za 100000 Sk s pravdepodobnosťou $p = 0.01$.

Pravdepodobnostné rozdelenie imania po udalosti je

$$\begin{aligned} 350000 - 100000 = 250000 &\text{ s pravdepodobnosťou } 0.01 \\ 350000 &\text{ s pravdepodobnosťou } 0.99 \end{aligned}$$

Poistenie umožňuje toto zmeniť. Ak si subjekt zaplatí poistné 10 za náhradu plnej hodnoty straty, potom rozdelenie pravdepodobnosti je

$$\begin{aligned} 350000 - 10 = 349990 &\text{ s pravdepodobnosou } 0.99 \\ 350000 - 100000 + 100000 - 10 = 349990 &\text{ s pravdepodobnosou } 0.01 \end{aligned}$$

– teda s istotou má 349990 Sk.
Všeobecne nech

W_0	je počiatočné imanie poistenca,
L	je strata v prípade poistnej udalosti,
B	je výška náhrady ($0 \leq B \leq L$),
γB	je poistné,
p	je pravdepodobnosť poistnej udalosti
$\Omega = \{0, 1\}$	je pravdepodobnostný priestor (0 – nenastane, 1 – nastane), $P(0) = 1-p$, $P(1) = p$.

Poistenec si volí výšku náhrady B a tak množinou V jeho rozhodnutí je interval $[0, L]$. Ním si volí náhodnú premennú $x \in \Omega \to R_+^2$, kde

$$\begin{aligned} x_0 &= W_0 - \gamma B \\ x_1 &= W_0 - L + (1 - \gamma)B, \end{aligned}$$

nazývanú *kontingentným plánom*. Ak vyeliminujeme B, dostávame

$$x_1 = W_0 - L + (1 - \gamma)\frac{W_0 - x_0}{\gamma}$$

t. j.

$$\gamma x_1 + (1 - \gamma)x_0 = \gamma\Big(W_0 - L + \frac{1 - \gamma}{\gamma}W_0\Big) = \gamma\Big(- L + \frac{1}{\gamma}W_0\Big). \tag{6.1}$$

Poistenec stojí pred úlohou racionálneho výberu vektora (x_0, x_1) analogickou úlohe (2.1), (2.2) z Kapitoly 2 s kontingentným plánom (x_0, x_1) zodpovedajúcim košu statkov, priamkou (6.1) zodpovedajúcou rozpočtovej priamke a funkciou užitočnosti

$$U(x_0, x_1) = (1 - \gamma)u(x_0) + \gamma u(x_1).$$

Racionálny poistenec volí kontingentný plán na priamke (6.1) s najväčšou hodnotou užitočnosti U. Rozšírenie na bohatší pravdepodobnostný priestor $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ je zrejmé.

6.3 Očakávaná užitočnosť a averzia k riziku

V predchádzajúcom odseku sme nechali nezodpovedanou otázku povahy preferencií. Modelujeme ich tak, aby odrážali vzťah subjektu k riziku.

Najčastejšie sa preferencie odvodzujú z priemerných hodnôt funkcie užitočnosti imania. Nech $u(w)$ je užitočnosť imania w poistenca. Hodnota u po udalosti pri zvolenom kontingentnom pláne – náhodnej premennej x závisí od jej realizácie. Ak je F pravdepodobnostné rozdelenie náhodnej premennej x, potom *očakávaná* hodnota užitočnosti $\overline{u}$ po udalosti bude bude daná výrazom

$$\overline{u} = Eu(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}\,F(x);$$

ak Ω je konečné a P je pravdepodobnosť na Ω, potom

$$\overline{u} = \sum_{\omega\in\Omega} u(x(\omega))P(\omega).$$

Očakávaná hodnota užitočnosti mu je známa pred udalosťou; budeme predpokladať, že jeho preferencie sú generované hodnotou očakávanej užitočnosti po udalosti.

Nech $u(x)$ je ostro rastúca funkcia užitočnosti imania subjektu. Predpokladajme, že jeho počiatočné imanie je W_0 a zúčastní sa lotérie, v ktorej s pravdepodobnosou $\frac{1}{2}$ vyhrá alebo prehrá q. Ak $\Omega = \{0,1\}$ je pravdepodobnostný priestor (0 – prehra, 1 – výhra) a $\{x_0, x_1\}$ je zodpovedajúca náhodná premenná, potom

$$\begin{aligned} x_0 = x_1 &= W_0 && \text{ak nehrá}\\ x_1 = W_0 + q, \quad x_0 &= W_0 - q, && \text{ak hrá} \end{aligned}$$

a platí

$$\begin{aligned} \overline{u} = \frac{1}{2}u(W_0) + \frac{1}{2}u(W_0) = u(W_0) &= u\Big(\frac{x_0+x_1}{2}\Big) && \text{ak nehrá}\\ \overline{u} &= \frac{1}{2}u(x_1) + \frac{1}{2}u(x_0) && \text{ak hrá.} \end{aligned}$$

Či bude, alebo nebude hrať, závisí od toho, či

$$u\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) > \frac{1}{2}u(x_0) + \frac{1}{2}u(x_1)$$

alebo

$$u\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) < \frac{1}{2}u(x_0) + \frac{1}{2}u(x_1).$$

Prvý prípad nastane, ak u je konkávna, vtedy subjekt preferuje istotu pred rizikom. Druhý prípad nastane, ak je u konvexná, vtedy subjekt preferuje riziko pred istotou. Ostro konkávna funkcia teda vyjadruje *averziu k riziku*, ostro konvexná *vyhľadávanie rizika* a lineárna *neutralitu* k riziku.

Všimnime si, že na rozdiel od základnej úlohy spotrebiteľa z Kapitoly 2, ktorá bola invariantná vzhľadom na rast zachovávajúcu transformáciu v priestore hodnôt funkcie užitočnosti (Poznámka, odsek 2.1), v našom prípade to neplatí. Výsledky rozhodovania závisia od číselných hodnôt funkcie užitočnosti, čo sa voľne vyjadruje tak, že má *kardinálny* charakter.

V prípade poistenia je očakávaná užitočnosť po udalosti

$$(1-p)u(W_0 - \gamma B) + pu(W_0 - L + (1-\gamma)B). \tag{6.2}$$

Očakávaný zisk poisťovňe je

$$p(\gamma - 1)B + (1-p)\gamma B = (\gamma - p)B.$$

Ak je vstup na trh poisťovní neobmedzený a poistka je spravodlivá, je očakávaný zisk poisťovne nulový, teda $\gamma = p$. Vtedy očakávaná užitočnosť je

$$(1-p)u(W_0 - pB) + pu(W_0 - L + (1-p)B).$$

Ak u je konkávna, maximálna užitočnosť sa dosiahne, ak

$$(1-p)u'(W_0 - pB)(-p) + pu'(W_0 - L + (1-p)B)(1-p) = 0,$$

teda

$$u'(W_0 - pB) = u'(W_0 - L + (1-p)B).$$

Ak u je ostro konkávna, u' je ostro klesajúca, vtedy z (6.2) vyplýva

$$W_0 - pB = W_0 - L + (1-p)B \quad \Longrightarrow \quad B = L. \tag{6.3}$$

Dostávame, že ak má poistenec averziu k riziku, poistí sa na plnú cenu.

Vzhľadom na analógiu úlohy s úlohou (2.1), (2.2) ju môžeme riešit postupom z odseku 2.3. To značí minimalizovať funkciu

$$U(x_0, x_1) = (1-p)u(x_0) + pu(x_1)$$

s $\gamma = p$ pri podmienke (6.1). Podmienka (2.4) dáva

$$(1-p)u'(x_0) \quad = \quad \lambda(1-p), \tag{6.4}$$

$$pu'(x_1) = \lambda p, \tag{6.5}$$

teda $u'(x_0) = u'(x_1)$, čo je ekvivalentné s (6.3).

6.4 Diverzifikácia a zdielanie rizika

Ak je daždivé leto, bude to zle pre výrobcov slnečných okuliarov, ale dobre pre výrobcov dáždnikov. Pre investora, ktorý sa vyhýba riziku má zmysel investovať súčasne do výroby okuliarov aj výroby dáždnikov. Podobne investor s averziou k riziku, ktorý sa chce poistiť voči výkyvom výmenných kurzov investuje do aktív v rozličných menách.

Príklad.

	okuliare	dáždniky
cena akcie teraz	10	10
cena v daždivom lete	5	20
cena v slnečnom leto	20	5

Predpokladajme, že pravdepodobnosti daždivého a slnečného leta sú rovnaké. Ak investujeme 100 jednotiek do jedného druhu akcií, v obidvoch prípadoch bude ich cena v lete 200 jednotiek alebo 50 jednotiek s pravdepodobnosťami 50%, ich očakávaná hodnota bude 125. Ak za rovnakú cenu kúpim po 5 akcií obidvoch spoločností, očakávaná hodnota bude rovnaká, ale budeme ju mať s istotou.

Tomuto hovoríme *diverzifikované investovanie.* V praxi nie je diverzifikácia taká jednoduchá, lebo výnosy môžu byť nielen negatívne, ale aj pozitívne korelované.

Ak má spotrebiteľ svoj majetok sústredený v jednom statku (dom), ťažko môže sám svoje riziko diverzifikovať. Takých jednotlivcov však je spravidla veľa. Ak je p pravdepodobnosť, že domkára postihne udalosť, predstavujúcu stratu L (napr. požiar), má každý z ich očakávanú stratu pL. Ak sú udalosti nezávislé (napríklad domy sú ďaleko od seba), očakávaný počet udalostí je pN a sumárna očakávaná strata je pNL. Ak dá každý z nich do spoločného fondu sumu pL, z ktorých sa poškodeným vyplatí strata, *zdielajú* svoje riziko.

To je princíp „vzájomnej“ poisťovňe, komerčné poisťovne toto organizujú a si za to nechávajú platiť. Spravidla ďalej rozkladajú svoje riziko, *zaisťujú sa* u iných poisťovní.

6.5 Neistota výrobcu

Rovnako ako spotrebiteľ, aj výrobca je konfrontovaný s neistotou. Neistá môže byť ako cena, tak aj objem produktu.

Uvažujme o výrobcoch s hladkou rastúcou ostro konvexnou nákladovou funkciou, spĺňajúcou $C''(y) > 0$. Predpokladajme najprv náhodnosť ceny, teda nech cena je náhodná premenná s distribučnou funkciou F. Potom očakávaný zisk π je

$$E\pi = \int_0^\infty (py - C(y))\,\mathrm{d}\,F(p).$$

Ak je neistý výsledok a F je opäť jeho distribučnou funkciou, potom

$$E\pi = \int_0^\infty (py - C(y))\,\mathrm{d}\,F(y)$$

Ak rizikovo neutrálny výrobca výrobca maximalizuje očakávaný zisk, potom v prvom prípade volí $y = \hat{y}$ tak, aby platilo $\frac{\partial \pi}{\partial y}(\hat{y}) = 0$, t. j.

$$\int_0^\infty [p - C'(\hat{y})]\,\mathrm{d}\,F(p) = 0,$$

čo značí

$$p_S(\hat{y}) = C'(\hat{y}) = Ep. \tag{6.6}$$

Ak má averziu k riziku, jeho užitočnosť je striktne konkávna a maximalizuje očakávanú užitočnosť

$$\int_0^\infty u(py - C(y))\,\mathrm{d}\,F(p),$$

volí $y = y^*$ tak, aby

$$\int_0^\infty u'(py^* - C(y^*))(p - C'(y^*))\,\mathrm{d}\,F(p) = 0. \tag{6.7}$$

Platí

$$\begin{aligned} u'(p\hat{y} - C(\hat{y})) &> u'(Ep\hat{y} - C(\hat{y})), \qquad & p - C'(\hat{y}) &< 0 \qquad & &\text{ak } p < Ep \\ u'(p\hat{y} - C(\hat{y}) &< u'(Ep\hat{y} - C(\hat{y})), \qquad & p - C'(\hat{y}) &> 0 \qquad & &\text{ak } p > Ep, \end{aligned}$$

z čoho vyplýva, že integrál na ľavej strane (6.7) je < 0 pre $y = \hat{y}$. Platí

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial y} \int_0^\infty u'(py - C(y))(p - C'(y))\,\mathrm{d}\,F(p) \\ &= \int_0^\infty \underbrace{u''(py - C(y))}_{<0}(p - C'(y))^2\,\mathrm{d}\,F(p) - \int_0^\infty \underbrace{u'(py - C(y))}_{>0}\underbrace{C''(y)}_{>0}\,\mathrm{d}\,F(p) < 0, \end{aligned}$$

integrál na ľavej strane teda klesá s y. Značí to, že pre y^*, ktoré rieši (6.7) a teda maximalizuje očakávanú užitočnosť, platí $y^* < \hat{y}$. Rizikovo averzný výrobca bude teda vyrábať menej.

6.6 Cvičenia

6.1. Šimonova funkcia užitočnosti je $u(w) = \sqrt{w}$, kde w je výška jeho imania. Má 1 mil. Sk a rozmýšľa, že vloží 500 000 Sk do financovania kamiónu do Alma Aty, ktorého cesta bude s pravdepodobnosťou 80 % úspešná, s pravdepodobnosťou 20 % oň príde. Aký musí byť zisk, aby sa rozhodol peniaze do projektu vložiť?

6.2. Shylock vlastní loď za 200 miliónov, jeho celkový majetok je 225 miliónov a jeho funkcia užitočnosti je odmocnina z jeho majetku. Pravdepodobnosť stroskotania lode je 0.02. Ak chce maximalizovať očakávanú užitočnosť a poisťovňa pracuje s nulovým ziskom, koľko je ochotný zaplatiť za úplné poistenie lode?

6.2. Fredy Gambler má stovku a ide si zahrať ruletu. Rozhoduje sa medzi možnosťou staviť na červenú – čiernu s pravdepodobnosťou výhry 18/37 s dvojnásobnou výplatou vkladu v prípade výhry alebo stávkou na konkrétne číslo s pravdepodobnosťou výhry 1/37 a výplatou vo výške 36-násobku v prípade výhry. V prípade prehry v obidvoch prípadoch svoj vklad stratí. Fredy rád riskuje a preto je jeho funkcia užitočnosti konvexnou funkciou výsledku, $u(y) = y^2$.
Ak chce maximalizovať svoju očakávanú užitočnosť, koľko staví na farbu a koľko na číslo?

6.3. Fero dostal výplatu 1 200 Sk a chystá sa staviť na víťaza futbalu Česko – Slovensko. Za 4 Sk si môže kúpiť kupón, za ktorý dostane 10 Sk ak vyhrá Česko, inak nič. Za 6 Sk si môže kúpiť kupón, za ktorý dostane 10 Sk ak vyhrá Slovensko, inak nič. Fero si myslí, že mužstvá majú rovnakú šancu na víťazstvo. Ak má maximalizovať očakávanú logaritmickú funkciu užitočnosti, aké kupóny nakúpi?

6.4. Diego dostal odmenu 200 pesos a chce staviť na víťaza kohútieho zápasu, v ktorom kohút 1 má šancu na výhru 70 % a kohút 2 šancu 30 %. Diego má možnosť kúpiť si za 70 pesos kupón, za ktorý dostane 100 pesos ak vyhrá A, inak nič, alebo za 30 pesos kupón, za ktorý vyhrá 100 pesos ak zvíťazí B, inak nič. Ak má logaritmickú fukciu užitočnosti, na ktorého kohúta staví?

6.5. Každá koruna investovaná do spoločnosti A vynesie s istotou 2 Sk, každá koruna investovaná do B vynesie 8 Sk s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$ a 0 s rovnakou pravdepodobnosťou. Investor má logaritmickú funkciu užitočnosti. Ak S je objem, ktorý investuje do A a $10000 - S$ je objem, ktorý investuje do B, ako má zvoliť S, aby dosiahol maximálnu očakávanú užitočnosť?

6.6. Willy sa potápa v mori pri Jamajke a dúfa, že objaví potopený pirátsky poklad v cene 1 milióna s pravdepodobnosťou úspechu $0,01\%$. Vynaložil na to všetky svoje finančné zdroje a aby si mohol večer v bare u Juanita vypiť svoj rum, ponúka Pepemu, že mu za príspevok naň predá polovicu majetníckeho práva na poklad. Koľko najviac je Pepe ochotný prispieť Willymu, ak má v kapse 100 a jeho funkcia užitočnosti je $u(x) = \sqrt{x}$?

6.7. Piťo má skon k riziku a preto je jeho funkcia užitočnosti konvexná, $u(w) = w^{1.5}$. Má 200 korún a rozmýšľa o tom, že staví na ruletu na farbu s pravdepodobnosťou výhry 18/37. Pustí sa do hry?

6.8. Olaf všetko prepil a rozhoduje sa, či zostane pracovať v prístave, alebo pôjde loviť veľrybu. Za prácu v prístave zarobí 1000, pravdepodobnosť, že uloví veľrybu je 25 %. Ak je jeho funkcia užitočnosti $u(\omega) = \sqrt{\omega}$, pri akej minimálnej cene veľryby sa vydá na lov?

6.9. Je 6.50 a Ferdo Mravec sa rozhoduje, či pôjde na výlet. Podľa Iľka bude na 30 % pekne, na 50 % sucho ale hmla, na 20 % bude pršať. Ferdova užitočnosť má nasledovné hodnoty: 0 ak zmokne, 10 ak bude na výlete a nič neuvidí, 50 ak bude na výlete a bude pekne. Ak zostane doma, jeho užitočnosti budú 0 ak bude sucho ale hmla, -10 ak bude pekne a 20 ak bude pršať. Ak sa rozhoduje na základe očakávanej užitočnosti, ako sa rozhodne?

6.10. Van Gils má 10 000 guldenov a rozmýšľa, že ich investuje do tričiek s nápisom Holandsko – majster sveta. Ak Holanďania zvíťazia, počíta, že ich predá za 50 000 guldenov, ak nie, nepredá ani jedno; ak je jeho funkcia užitočnosti $u(w) = \sqrt{w}$, aká musí byť pravdepodobnosť víťazstva Holandska, aby sa pustil do výroby užitočnosť, ak je jeho funkcia užitočnosti $u(x) = \sqrt{x}$?

6.11. Koruna, investovaná do spoločnosti ISTOTA (resp. RISKJEZISK) vynesie 3 Sk (resp. 9 Sk s pravdepodobnosťou $p = 1/3$, inak nič). Funkcia užitočnosti investora je $u(w) = \sqrt{w}$.
a) Ak má investor milión, z ktorého časť chce investovať do ISTOTY a časť do RISKJEZISKu, akú časť investuje do ktorej, aby maximalizoval svoju užitočnosť?
b) Investor sa rozhoduje iba pre jednu zo spoločností. Aká by musela byť pravdepodobnosť výnosu v spoločnosti RISKJEZISK, aby nezáležalo na tom, do ktorej spoločnosti investuje?

7 Informácie a ekonómia

7.1 Symetrická a asymetrická informácia

V kapitolách 3–5 sme dospeli k záverom, že za rozumných predpokladov existuje na trhu rovnováha. Táto rovnováha predstavuje spoločenské optimum v tom zmysle, že je pre účastníkov Paretovsky optimálna.

V ekonomickej realite však možno pozorovať, že k rovnováhe na trhu nemusí dôjsť, resp. že rovnováha predstavuje zlyhanie trhu. Ekonomická veda začala hľadať príčiny a ako jednu z nich identifikovala asymetriu informácií: účasníci trhu nie sú o obchodovaných statkoch rovnako informovaní. Doteraz sme totiž mlčky v teórii trhu vychádzali z predpokladu, že dodávatelia a spotrebitelia majú rovnaké informácie, teda že informácie sú *symetrické*. Nemusí to byť pravda vždy, napríklad spotrebiteľ nemusí o kvalite vedieť všetko to, čo jeho výrobca. Asymetria môže by aj v neprospech dodávateľa: napríklad poisťovňa nemusí vedieť, k akej rizikovej skupine patrí jej klient.

Problémy asymetrickej informácie boli v ostatných rokoch predmetom intenzívneho skúmania, za výsledky v tejto oblasti boli udelené dve ceny Švédskej banky na počesť A. Nobela. Dostali ju Akerlof, Spence, Stiglitz v r. 2001 za teóriu trhov pri asymetrickej informácii a Mirrless, Vickrey 1996 za teóriu pohnútok (incentives) pri asymetrickej informácii. O rozličných otázkach informácií v ekonómii jestvuje dnes už rozsiahla teória, my sa v tejto kapitole obmedzíme na niekoľko príkladov.

7.2 Asymetrická informácia a zvrátený výber

Klasickým príkladom zlyhania trhu je Akerlofov príklad trhu ojazdených áut. Asymetria informácie spočíva v tom, že predajca pozná stav auta, kým zákazník nie.

Pre jednoduchosť rozdeľme ojazdené autá do dvoch tried, na kvalitné (nazvime ich fára, v originále plums) a nekvalitné (nazvime ich črepy, v origináli lemons). Predpokladajme, že:

- na trhu je rovnaký počet fár a črepov
- predajca pozná kvalitu jednotlivých áut, kupec vie iba pomer počtu fár a črepov
- za črep žiada predajca najmenej 1000, zákazník kúpi najviac za 1200
- za fáro žiada predajca najmenej 2000, zákazník dá najviac 2400

Ak by informáciu o kvalite jednotlivého auta mali kupci rovnako ako predajcovia, obchodovali by sa črepy za cenu medzi 1000 a 1200, fára za ceny medzi 2000 a 2400. Neinformovaný kupec zaplatí najviac očakávanú hodnotu

$$\frac{1}{2}1200 + \frac{1}{2}2400 = 1800,$$

za ktorú predajca fáro nepredá. Predávať sa teda budú iba črepy za cenu ≤ 1200. Trh s fárami zlyhá.

Dôvodom zlyhania trhu fár je externalita, ktorú preň predstavujú črepy. Riešením situácie je *signalizácia*, ktorou predajca kupujúcemu čiastočne odovzdáva informáciu o stave auta, napríklad v podobe dĺžky záruky naň.

Všeobecnejšie nech predajca, ktorý pozná kvalitu jednotlivých výrobkov predáva kvalitnejšie (resp. nekvalitnejšie) za cenu najmenej A_P (resp. B_P), a pre zákazníka, majú cenu najviac $A_Z \geq A_P$ (resp. $B_Z \geq B_P$). Nech q je pomer množstva kvalitnejších výrobkov k ich celkovému množstvu. Zákazník bude tovar kupovať, ak jeho cena nebude vyššia, ako $qA_Z + (1-q)B_Z$. Aby predajca kvalitnejšie výrobky predával a teda trh s nimi nezlyhal, musí táto cena byť aspoň B_Z, teda musí platiť

$$qA_Z + (1-q)B_Z \geq A_P$$

t. j.

$$q \geq \frac{A_P - B_Z}{A_Z - B_Z}.$$

Všimnime si, že ak $A_P < B_Z$, táto podmienka je splnená pre ľubovoľné $q \geq 0$.

Na príklade poistenia si ukážeme, ako zvrátený výber môže spôsobiť zlyhanie trhu, ak je informácia asymterická v neprospech predajcu.

Predpokladajme, že poisťovňa má identických zákazníkov čo do ich imania a averzie k riziku, ktorí sa však líšia v *pravdepodobnosti poistnej udalosti*. Napríklad môže ísť o havarijnú poistku na auto rozlične rizikových vodičov. Pre zjednodušenie predpokladajme, že ide o jeden typ poistnej udalosti s výškou straty L.

Nech $[\underline{P}, \overline{P}]$ je interval, v ktorom sa nachádzajú všetky pravdepodobnosti poistnej udalosti. Nech F je distribučná funkcia pravdepodobnosti poistnej udalosti klientov, (platí $F(q) = 0$ pre $q \leq \underline{P}$, $F(q) = 1$ pre $q \geq \overline{P}$] a nech f je jej hustota. Predpokladajme, že poisťovňa nepozná rizikovosť jednotlivých klientov, ale distribučná funkcia pravdepodobnosti udalosti je jej známa z dlhodobých štatistík.

Ak by poisťovňa poznala pravdepodobnosti poistnej udalosti jednotlivých zákazníkov, mohla by im účtovať rozličné poistné. Ak ich nepozná, účtuje vetkým rovnakú poistné p. Pokúsme sa určiť jeho rovnovážnu hodnotu $\hat{p}$.

Za predpokladu konkurenčného prostredia by sa v rovnováhe malo $\hat{p}$ rovnať očakávanej strate poisťovne, a to pri plnom poistení, ktoré je dôsledkom averzie poistencov k riziku. Malo by teda platiť

$$\hat{p} = LE(q) = L \int_{\underline{P}}^{\overline{P}} q f(q) \, \mathrm{d}\, q.$$

Pri hodnote poistného $\hat{p}$ by bol zisk poisťovne nulový vtedy, ak by ju kupovali všetci klienti. Poistenci však majú informáciu o svojej individuálnej pravdepodobnosti poistnej udalosti q. Poistku budú kupovať iba tí, ktorým sa to vzhľadom na ich informáciu oplatí. Preto treba pri výpočte zisku resp. straty poisťovne brať do úvahy túto podmienku.

Ak q je pravdepodobnosť udalosti jednotlivého klienta, poistku v cene p si kúpi, ak jeho užitočnosť pri poistení prevyšuje jeho očakávanú užitočnosť oproti tomu, ak by sa nepoistil, t. j. ak

$$u(w-p) \geq qu(w-L) + (1-q)u(w),$$

alebo

$$q \geq h(p),$$

kde w je počiatočné imanie klienta a

$$h(p) = \begin{cases} \underline{P} & \text{ak } \dfrac{u(w)-u(w-p)}{u(w)-u(w-L)} < \underline{P} \\ \dfrac{u(w)-u(w-p)}{u(w)-u(w-L)} & \text{ak } \underline{P} \le \dfrac{u(w)-u(w-p)}{u(w)-u(w-L)} \le \overline{P} \\ \overline{P} & \text{ak } \dfrac{u(w)-u(w-p)}{u(w)-u(w-L)} > \overline{P} \end{cases}$$

Nazveme p^* kompetitívnou rovnováhou pri asymetrickej informácii, ak spĺňa

$$p^* = g(p^*), \tag{7.1}$$

kde

$$g(p) = LE(q|q \ge h(p)) = \begin{cases} L\overline{P} & \text{ak } h(p) = \overline{P} \\ \dfrac{L}{1-F(h(p))} \displaystyle\int_{h(p)}^{\overline{P}} qf(q)\,\mathrm{d}\,q & \text{ak } \underline{P} \le h(p) < \overline{P} \end{cases}. \tag{7.2}$$

Podmienka (7.1) predstavuje rovnováhu v tom, že sa poistia iba tí, pre ktorých je poistka výhodná, poisťovňa nemá ani zisk, ani stratu. Ukážeme, že ak je F spojitá, potom rovnováha existuje.

Funkcia g je spojitá a platí $g\colon [\underline{P}L, \overline{P}L] \to [\underline{P}L, \overline{P}L]$. Graf funkcie g musí teda v nejakom bode p^* pretťať diagonálu. Tento bod je pevným bodom predstavujúcim rovnováhu.

Na konkrétnom príklade si ukážeme, že táto rovnováha nemusí by efektívna. Naozaj, ak je $\overline{P} = 1$, dosadením za $h(p)$ do (1) sa presvedčíme, že $p^* = L$ je riešením. Neefektívnosť tejto rovnováhy spočíva v tom, že by sa poistili iba tí, ktorý majú istotu poistnej udalosti a cena ich poistky by bola rovná ich strate.

Nasledujúci príklad ukazuje, že táto rovnováha môže a nemusí byť jediná Nech $\underline{P} = 0$, $\overline{P} = 1$, q je rovnomerne rozdelené na intervale $[0, 1]$, teda $f(q) \equiv 1$. Platí

$$g(p) = L(1-h(p))^{-1} \int_{h(p)}^{1} q\,\mathrm{d}\,q = [1 + h(p)]\frac{L}{2},$$

rovnováha p^* je teda riešením rovnice

$$p^* = [1 + h(p^*)]\frac{L}{2}. \tag{7.3}$$

Funkcia g je zrejme rovnako ako funkcia h v tomto prípade ostro rastúca a ostro konvexná. Preto má rovnica (7.1) aj iné riešenie ako $p^* = L$ práve vtedy, ak

$$g'(L) > 1, \tag{7.4}$$

t. j.

$$u'(w-L) > 2\frac{u(w)-u(w-L)}{L}.$$

Záleží to teda od vzťahu veľkosti straty a miery averzie k riziku poistencov.

Dá sa ukázať, že ak platí (7.4), v istom dobre definovanom zmysle je rovnováha $p^* = 1$ nestabilná, kým rovnováha s $p^* < 1$ je stabilná [8].

Aj tento zvrátený výber sa poisťovne snažia riešiť formou signalizácie. Jej cieľom je získať o nehodovosti individuálneho klienta informáciu, ktorá im umožní odstupňovať poistné. U postenia motorových vozidiel sa to robí napríklad pomocou bonus-malus systému, odstupňovaním poistného podľa veku, pohlavia, atď.

7.3 Dalšie problémy asymetrickej informácie

Riziko morálky (v originále moral hazard). Pri určovaní poistného poisťovňa vychádza z predpokladu o rizikovosti poistenca, ktoré závisí od jeho spolupráce – napríklad lepším zabezpečením môže klient znížiť riziko krádeže. Poistenie mu k tomu nevytvára *pohnútky* (incentives). Naopak, môže ho viesť k ľahkomyselnosti, ktorá spätne ovplyvní jeho rizikovosť. Riešením formou signalizácie je napríklad spoluúčasť. Paradoxom tohoto riešenia je, že vedie k menšej miere poistenia, než by si ako poisťovňa, tak aj klienti želali. Tento rozdiel oproti trhovej rovnováhe pri úplnej symetrickej informácii predstavuje cenu informácie.

Úloha pán – sedliak (principal – agent) Sedliak (zamestnanec, daňovník) pozná svoju výkonnosť, pán (zamestnávateľ, daňová vrchnosť) nie. Úlohou je nájsť spôsob (incentive compatible) odmeňovania (zdanenia), ktorý vytvorí pohnútky pre maximálny výkon sedliaka (zamestnanca, daňovníka).

Literatúra

[1] F. Turnovec, *Úvod do mikroekonomickej teórie*, učebný text, Ekonomická univezita Bratislava, 1991.

[2] H. Varian, *Intermediate Microeconomics*, 3. vydanie, Norton, 1993. (Český preklad, Mikroekonomie).

[3] H. Varian, *Microeconomic Analysis*, 3. vydanie, Norton, 1992.

[4] A. Mas-Colell, M. D. Whinston, J. R. Green, *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, 1995.

[5] J. M. Henderson, R. E. Quandt, *Microeconomic Theory*, 3. vydanie, McGraw-Hill, 1980.

[6] G. A. Jehle, P. J.Reny, *Advanced Microeconomic Theory*, Addison-Wesley, 1998.

[7] M. Ďurica, *Analýza Walrasovej rovnováhy v prípade zameniteľných statkov*, Bakalárska práca FMFI UK, 2008.

[8] Z. Molnárová, *Adverse selection in the market with uniformly distributed accident probabilities*, Bakalárska práca FMFI UK, 2009.

[9] M. Čechvala, *Krátkodobá versus dlhodobá rovnováha*, Bakalárska práca FMFI UK, 2013.

[10] A. Tunová, *Dynamika prechodu od krátkodobej k dlhodobej rovnováhe čiastkového trhu* Bakalárska práca FMFI UK, 2016.

[11] M. Mudroň, *Grafická ilustrácia Walrasovej rovnováhy na Edgeworthovom obdĺžniku.* Bakalárska práca FMFI UK, 2011.

[12] Z. Batmendijnová, *Limitné vzťahy základných produkčných funkcií* Bakalárska práca FMFI UK 2007.