I. Nevlastné integrály

1. Definície a základné vlastnosti nevlastných integrálov

Definícia 1.1. *Nech funkcia f je definovaná na intervale $< a, \infty)$ a je riemannovsky integrovateľná na ľubovoľnom uzavretom intervale $< a, \eta > \subset < a, \infty)$.*

Ak existuje vlastná limita funkcie

$$F(\eta) = \int_a^\eta f(x)dx$$

pre $\eta \to \infty$, nazýva sa nevlastným Riemannovým integrálom funkcie f na intervale $< a, \infty)$ a označuje sa $\int_a^\infty f(x)dx$. Teda

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{\eta \to \infty} \int_a^\eta f(x)dx = \lim_{\eta \to \infty} F(\eta).$$

a hovoríme, že f je integrovateľná na $< a, \infty)$.

Poznámka 1.1. Symbol $\int_a^\infty f(x)dx$ tiež nazývame nevlastným integrálom a hovoríme, že nevlastný integrál konverguje, ak uvedená limita je vlastná a diverguje v opačnom prípade.

Príklad 1.1. Zistite, pre aké hodnoty parametru α konverguje nevlastný integrál

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \ (a > 0, \ \alpha > 0). \tag{1}$$

Pretože $\displaystyle\int_a^\eta \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_a^\eta & \text{pre } \alpha \neq 1 \\ \ln x\big|_a^\eta & \text{pre } \alpha = 1, \end{cases}$ limita $\displaystyle\lim_{\eta \to \infty} \int_a^\eta \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$ existuje a je vlastná len pre $\alpha > 1$.

Teda $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$, ak $\alpha > 1$ a pre $\alpha \leq 1$ integrál (1) diverguje.

Poznámka 1.2. Ak na vyjadrenie limity funkcie $F(\eta)$ z definície 1.1. použijeme "jazyk postupnosti", môžeme nevlastný integrál na neohraničenom intervale chápať ako súčet radu $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} f(x)dx$, kde postupnosť $\{\eta_n\}_{n=0}^{\infty}$ je taká, že pre každé n $\eta_n > a,\ \eta_0 = a$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = \infty$.

Tvrdenie 1.1. *Pre konvergenciu nevlastného integrálu $\int_a^{\infty} f(x)dx$ je nutné a stačí, aby pre ľubovoľnú postupnosť $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ čísel väčších ako a s vlastnosťou $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = +\infty$ rad*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\eta_{n-1}}^{\eta_n} f(x)dx \ (\eta_0 = a)$$

konvergoval.

Táto vlastnosť nám poskytuje možnosť využiť pri zisťovaní konvergencie alebo divergencie nevlastných integrálov mnohé kritéria konvergencie alebo divergencie radov.

Definícia 1.2. *Nech funkcia f je definovaná na intervale $< a, b)$ a je riemannovsky integrovateľná na ľubovoľnom uzavretom intervale $< a, \eta > \subset < a, b)$.*

Ak existuje vlastná limita funkcie $F(\eta) = \int_a^{\eta} f(x)dx$ pre $x \to b^-$, nazýva sa nevlastným integrálom funkcie f na intervale $< a, b)$. Teda

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\eta\to b^-} \int_a^{\eta} f(x).$$

a hovoríme, že f je integrovateľná na $< a, \infty)$.

Poznámka 1.3. Podstata tejto definície spočíva v tom, že v ľubovoľnom okolí bodu b funkcia f môže byť neohraničená. Bod b budeme nazývať singulárnym alebo kritickým bodom funkcie f, ak je funkcia neohraničená na intervale $< a, b)$, ale je ohraničená na každom uzavretom podintervale $< a, \eta >$ intervalu $< a, b)$.

Definícia 1.3. *Ak funkcia f je definovaná na intervale $(a, b >$ a integrovateľná na ľubovoľnom uzavretom intervale $< \eta, b > \subset (a, b >$, tak definujeme*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\eta\to a^+} \int_{\eta}^b f(x)dx.$$

Podobne definujeme

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx := \lim_{\eta\to -\infty} \int_{\eta}^b f(x)dx.$$

Definícia 1.4. *Nech funkcia f je definovaná na $(-\infty, \infty)$ a integrovateľná na každom uzavretom intervale $< \eta', \eta'' >$. Potom integrál $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ definujeme ako*

$$\lim_{\substack{\eta'\to-\infty \\ \eta''\to+\infty}} \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx \quad \text{pre } \eta' \to -\infty \text{ a } \eta'' \to +\infty$$

nezávisle na sebe, ak táto limita je vlastná.

Príklad 1.2. Zistite, pre aké hodnoty parametra α konverguje integrál

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \ (\alpha > 0). \tag{2}$$

Pretože pre $\eta \in < a, b)$ $\displaystyle\int_a^\eta \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(b-x)^{1-\alpha}\Big|_a^\eta, & \text{ak } \alpha \neq 1 \\ \ln(b-x)|_a^\eta, & \text{ak } \alpha = 1, \end{cases}$

$\displaystyle\lim_{\eta\to b^-}\int_a^\eta \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ existuje pre $\alpha < 1$. Teda integrál (2) je konvergentný, ak $\alpha < 1$ a je divergentný, ak $\alpha \geq 1$.

Poznámka 1.4. Podobne, ako v príklade 1.2. sa zistí, že integrál $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ konverguje pre $\alpha < 1$ a diverguje pre $\alpha \geq 1$.

Poznámka 1.5. Pretože otázka konvergencie nevlastného integrálu je rovnaká tak pre nevlastný integrál na neohraničenom intervale, ako aj pre nevlatný integrál neohraničenej funkcie v okolí jedného z koncových bodov intervalu integrovania, v ďalšom budeme uvažovať tieto prípady spolu v zmysle nasledujúcej definície.

Definícia 1.5. *Nech* $< a, B)$ *je ohraničený alebo neohraničený interval a funkcia* f *je definovaná na ňom. Nech* f *je integrovateľná na každom uzavretom intervale* $< a, \eta > \subset < a, B)$. *Potom definujeme*

$$\int_a^B f(x)dx := \lim_{\eta\to B}\int_a^\eta f(x)dx, \tag{3}$$

ak táto limita je vlastná.

Ďalej, keď nebude vopred povedané, budeme uvažovať nevlastný integrál (3), ktorý súvisí len s hornou hranicou. Nevlastný integrál súvisiaci s dolnou hranicou sa definuje podobne.

Veta 1.1. *Nech funkcie* f *a* g *sú definované na intervale* $< a, B)$ *a integrovateľné na ľubovoľnom uzavretom intervale* $< a, \eta > \subset < a, B)$. *Nech pre ne sú definované nevlastné integrály*

$$\int_a^B f(x)dx, \tag{4}$$

$$\int_a^B g(x)dx. \tag{5}$$

Potom

a) *Ak* $B \in R$ *a* $f \in \Re < a, B >$, *tak sa hodnoty integrálu (4), chápaného tak v nevlastnom zmysle na* $< a, B)$, *ako aj vo vlastnom zmysle, zhodujú.*

b) *Pre ľubovoľné* $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ *funkcia* $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ *je integrovateľná na* $< a, B)$ *a platí rovnosť*

$$\int_a^B (\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x))\, dx = \lambda_1 \int_a^B f(x)dx + \lambda_2 \int_a^B g(x)dx.$$

c) *Ak* $c \in < a, B)$, *tak*

$$\int_a^B f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^B f(x)dx.$$

d) *Ak* $\varphi :< \alpha, \beta) \to < a, B)$ *je spojite diferencovateľná rýdzomonotónna funkcia, pričom* $\varphi(\alpha) = a$ *a* $\varphi(\beta) \to B$ *pre* $t \to \beta, t \in < \alpha, \beta)$, *tak nevlastný integrál funkcie* $f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$ *existuje na* $< \alpha, \beta)$ *a platí rovnosť*

$$\int_a^B f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)dt.$$

Veta 1.2. *(Integrovanie per partes.) Nech funkcie* f, g *sú spojite diferencovateľné na* $< a, B)$ *a existuje* $\lim\limits_{x \to B} f(x)g(x) = L < \infty$. *Za týchto podmienok z konvergencie jedného z integrálov* $\int_a^B f(x)g'(x)$ *a* $\int_a^B g(x)f'(x)dx$ *vyplýva konvergencia druhého a platí*

$$\int_a^B f(x)g'(x)dx = L - f(a)g(a) - \int_a^B g(x)f'(x)dx.$$

Poznámka 1.6. Z tvrdenia c) vety 1.1. vyplýva, že nevlastné integrály

$$\int_a^B f(x)dx, \int_c^B f(x)dx$$

konvergujú alebo divergujú súčastne. Teda konvergencia nevlastného integrálu nezávisí od voľby začiatočného bodu $c \in < a, B)$ (podobne, ako konvergencia radu sa nezmení vynechaním konečného počtu členov radu).

Nevlastné integrály s konečným počtom singulárnych bodov

Definícia 1.6. *Bod* x_0 *nazývame singulárnym (kritickým) bodom funkcie* $f(x)$, *ak*

a) *alebo je funkcia* f *definovaná v intervale* $(x_0 - \delta, x_0)$ *a je v ňom neohraničená pre každé dostatočne malé číslo* $\delta > 0$;

b) *alebo funkcia* f *je definovaná a neohraničená v intervale* $(x_0, x_0 + \delta)$, *kde* $\delta > 0$ *je ľubovoľné dostatočne malé číslo.*

Ak je funkcia f definovaná v intervale $(a, +\infty)$, tak $+\infty$ budeme pokladať za singulárny (kritický) bod a podobne $-\infty$ bude singulárnym bodom funkcia f, ak je f definovaná v intervale $(-\infty, b)$.

Definícia 1.7. *Nech funkcia f je definovaná v intervale (a, b) a má tam konečný počet kritických bodov $c_1, c_2, \ldots, c_k$ a $(a < c_1 < c_2 < \ldots < c_k < b)$, pričom a, b tiež môžu byť kritickými bodmi funkcie f. Nech v každom uzavretom podintervale intervalu (a, b), ktorý neobsahuje ani jeden z kritických bodov, je riemannovsky integrovateľná. Hovoríme, že nevlastný integrál $\int_a^b f(x)dx$ konverguje (existuje) práve vtedy, keď pre každú postupnosť bodov $d_0, d_1, \ldots, d_k$ takú, že $a < d_0 < c_1 < d_1 < c_2 < d_2 < \ldots < d_{k-1} < c_k < d_k < b$ existujú integrály*

$$\int_a^{d_0} f(x)dx, \int_{d_0}^{c_1} f(x)dx, \int_{c_1}^{d_1} f(x)dx, \ldots, \int_{c_k}^{d_k} f(x)dx, \int_{d_k}^{b} f(x)dx.$$

Súčet týchto integrálov budeme nazývať nevlastným integrálom $\int_a^b f(x)dx$.

Týmto spôsobom môžeme rozdeliť interval (a, b) na konečný počet podintervalov, v každom z ktorých funkcia f má len jeden kritický bod.

Vypočítajte nevlastné integrály:

1. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$.

2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+4}$.

3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$.

4. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-ax^2} dx \ (a > 0)$.

5. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x)}$.

6. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

7. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{xdx}{(1+x)^2}$.

8. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}$.

9. $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+x-2}$.

10. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}dx$.

11. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

12. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx dx \ (a > 0)$.

13. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx dx \ (a > 0)$.

14. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$.

15. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

16. $\displaystyle\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

18. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

19. $\displaystyle\int_0^1 x\ln x dx$.

20. $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

21. $\int_0^1 \ln x dx$.

22. $\int_0^1 \dfrac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

23. $\int_{-1}^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

24. $\int_0^\infty \dfrac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$.

25. $\int_1^\infty \dfrac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$.

26. $\int_0^1 \dfrac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$.

27. $\int_0^1 (\ln x)^p\, dx$ (p je prirodzené číslo).

28. a) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$; b) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x dx$.

29. Nech $\varphi(x) \geq 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0, \varphi'(x) \leq 0, \varphi'(x)$ je spojitá funkcia na $< a, +\infty)$. Dokážte, že $\int_0^\infty \varphi'(x)dx$ konverguje absolútne, t.j. že konverguje integrál $\int_0^\infty |\varphi'(x)|dx$.

30. Nájdite $\displaystyle\int_E \frac{e^{-\frac{x}{2}}|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}}dx$, kde E je množina tých hodnôt x z intervalu $(0, +\infty)$, pre ktoré integrand má zmysel.

Použitím rekurentných vzorcov vypočítajte integrály:

31. $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

32. $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}$.

33. <u>Strednou hodnotou funkcie</u> $f(x)$ na intervale $(0, +\infty)$ sa nazýva číslo

$$M[f] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt.$$

Nájdite stredné hodnoty nasledujúcich funkcií:

a) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2\left(x\sqrt{2}\right)$;

b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

c) $f(x) = \sqrt{x}\sin x$.

34. Dokážte, že

a) ak $\int_0^\infty x\varphi(x^2)dx$ konverguje, tak $\int_{-\infty}^\infty x\varphi(x^2)dx = 0$;

b) ak konverguje $\int_0^\infty \varphi(x^2)dx$, tak $\int_{-\infty}^\infty \varphi(x^2)dx = 2\int_0^\infty \varphi(x^2)dx$.