II. Metrický priestor

1. Definícia a základné vlastnosti metrických priestorov

Medzi najzákladnejšie pojmy v matematickej analýze patria pojmy metriky a metrického priestoru.

Definícia 1.1. *Nech $X \neq \emptyset$ je množina, d je reálna funkcia definovaná na karteziánskom súčine $X \times X$ nasledujúcimi vlastnosťami:*

1. *Pre všetky $x, y \in X$ je $d(x,y) \geq 0$ a $d(x,y) = 0$ práve vtedy, keď $x = y$.*
2. *Pre všetky $x, y \in X$ je $d(x,y) = d(y,x)$.*
3. *Pre všetky $x, y, z \in X$ je $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.*

Funkciu d nazývame metrika na množine X a dvojicu (X, d) nazývame metrickým priestorom.

V ďalšom texte obyčajne namiesto (X, d) je metrický priestor (ak je jasné o akú metriku ide), budeme krátko písať X je metrický priestor.

Poznámka 1.1. Vlastnosť 2. funkcie d sa nazýva symetričnosť a vlastnosť 3. trojuholníková nerovnosť.

Poznámka 1.2. Nech (X, d) je metrický priestor a $\emptyset \neq Y; Y \subset X$. Na $Y \times Y$ definujeme funkciu d' nasledovne:

Pre každú dvojicu $(x, y) \in Y \times Y$ platí $d'(x, y) = d(x, y)$. Potom d' je metrika na množine Y a dvojicu (Y, d') nazývame metrickým podpriestorom priestoru (X, d).

Definícia 1.2.

1. *Nech (X, d) je metrický priestor. Nech $A \subset X$. Potom číslo (môže byť aj $+\infty$)*

$$\operatorname{diam} A = \sup\{d(x, y);\ x, y \in A\}$$

   nazývame priemerom (diametrom) množiny A. Množina A sa nazýva ohraničená (neohraničená), ak $\operatorname{diam} < +\infty$ $(\operatorname{diam} = +\infty)$.

2. *Pre ľubovoľný bod $p \in X$ a $\varepsilon > 0$ označíme:*

$$O(p, \varepsilon) = \{x \in X; d(p, x) < \varepsilon\}.$$

Túto množinu budeme nazývať ε - ovým okolím bodu p (vzhľadom na metriku d).

Definícia 1.3. *Nech $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť bodov metrického priestoru (X, d). Hovoríme, že táto postupnosť konverguje k bodu $x \in X$, ak postupnosť $\{d(x_n, x)\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k nule. Postupnosť, ktorá nekonverguje k žiadnemu bodu priestoru (X, d), nazývame divergentnou. Ak postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $x \in X$ hovoríme tiež, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.*

Veta 1.1. *Každá postupnosť bodov metrického priestoru má najviac jednu limitu.*

Veta 1.2. *Ak postupnosť bodov metrického priestoru $(X, d)\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k bodu $x \in X$, tak každá z nej vybraná postupnosť konverguje ku tomu istému bodu $x \in X$.*

Poznámka 1.3. Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme ohraničenou, ak množina jej členov je ohraničená.

Veta 1.3. *Každá konvergentná postupnosť bodov metrického priestoru je ohraničená.*

Poznámka 1.4. Na každej množine možno definovať viacero metrík.

Nech d, d' sú dve metriky na množine X. Budeme hovoriť, že metriky d a d' sú ekvivalentné ak platí: Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k x v priestore (X, d) práve vtedy, keď konverguje ku x v priestore (X, d').

Na karteziánskom súčine metrických priestorov obvykle definujeme metriku nasledovne:

Definícia 1.4. *Nech $(X_1, d_1), (X_2, d_2), ..., (X_m, d_m)$ sú metrické priestory. Označíme $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$. Ak $x, y \in X, x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m), y = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m)$. Položme:*

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} d_i^2(\alpha_i, \beta_i)}.$$

Doporučujeme čitateľovi overiť si, že funkcia d je metrikou na priestore X. (Vlastnosti 1. a 2. sú zrejmé. Trojuholníkovu vlastnosť možno overiť pomocou nasledujúcej lemy.)

Lema 1.1. *Nech $a_i, b_i (i = 1, , 2, ..., m)$ sú reálne čísla. Potom platí:*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i.b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m} a_i^2}.\sqrt{\sum_{i=1}^{m} b_i^2}.$$

Veta 1.4. *Nech $(X_1, d_1), (X_2, d_2), ..., (X_m, d_m)$ sú metrické priestory. Postupnosť $\{X^n\}_{n=1}^{\infty}$ prvkov z $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$, t.j.*

$$X^n = (\alpha_1^n, \alpha_2^n, ..., \alpha_m^n) \in X$$

konverguje k prvku $X = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m) \in X$, v zmysle metriky zavedenej v definícii 1.4, vtedy a len vtedy, keď pre každé $i; 1 \leq i \leq m$ platí: $\lim_{n\to\infty} \alpha_i^n = \alpha_i$, t.j. postupnosť $\{\alpha_i^n\}_{n=1}^{\infty}$, konverguje v priestore (X_i, d_i) ku bodu $\alpha_i \in X_i$.

Poznámka 1.5. Konvergencia spomínaná vo vete 1.4 sa nazýva konvergenciou po súradniciach.

1. Nech $< a, b > \subset R$. Označíme $M(a, b)$ množinu všetkých reálnych funkcií definovaných a ohraničených na intervale $< a, b >$. Nech $f, g \in M(a, b)$. Dokážte, že funkcia

$$d(f, g) = \sup_{x \in <a,b>} | f(x) - g(x) |,$$

je metrika na priestore $M(a, b)$.

2. Označme $M-$ množinu všetkých ohraničených reálnych postupností. Nech $x, y \in M; x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Dokážte, že funkcia

$$d(x, y) = \sup_{i=1,2,...} | x_i - y_i |,$$

je metrika na priestore M.

3. Označme znakom $l^{(2)}$ množinu všetkých tých reálnych čísel, pre ktoré platí:
Ak $x \in l^{(2)}, x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, tak $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2$ konverguje. Nech $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ sú dva body z $l^{(2)}$. Dokážte, že funkcia

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}$$

je metrikou na $l^{(2)}$.

4. Nech $X = \{1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}\}$. Položme $d(x, x) = 0$, pre každé $x \in X$. Ďalej

$$d(1, \frac{1}{2}) = d(\frac{1}{2}, 1) = 1; d(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = d(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}; d(1, \frac{1}{3}) = d(\frac{1}{3}, 1) = \frac{1}{3}.$$

Je funkcia d metrikou na X?

5. Dokážte, že vlastnosti 1.,2.,3. metriky, z definície 1.1 sú nezávislé. (Nezávislosť vlastností chápeme v tom zmysle, že žiadna z nich nevyplýva z ostatných vlastností. Pozri návod.)

6. Nech $X \neq \emptyset$ a $d : X \times X \to R$ má nasledujúce vlastnosti:
a) $d(x, x) = 0$ pre všetky $x \in X$ a $d(x, y,) \neq \emptyset$ pre každé dva rôzne prvky z X.
b) Pre každé tri prvky $x, y, z \in X$ platí:

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Dokážte, že d je metrika!

7. Nech d_1, d_2 sú dve metriky na X. Sú funkcie $d_1+d_2, \max\{d_1, d_2\}, \min\{d_1, d_2\}$ metrikami na X?

8. Označme $E_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n); a_i \in R, i = 1, 2, ..., n\}$. Ak $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ sú dva body z E_n, tak kladieme

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

a) Ukážte, že funkcia d je metrikou na priestore E_n. (Funkcia d sa nazýva euklidovská metrika na E_n.)
b) Ak

$$\begin{aligned} A_1 =&(a_1^1, a_2^1, ..., a_n^1) \\ A_2 =&(a_1^2, a_2^2, ..., a_n^2) \\ &\vdots \\ A_k =&(a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k) \\ &\vdots \end{aligned}$$

je postupnosť bodov priestoru (E_n, d), potom táto postupnosť $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ konverguje v priestore (E_n, d) k bodu $A_0 = (a_1^0, a_2^0, ..., a_n^0)$ vtedy a len vtedy, ak $\{a_k^i\}_{i=1}^{\infty}$ konverguje ku a_k^0, $k = 1, 2, ..., n$. Dokážte. V zmysle poznámky 1.5 možno posledné tvrdenie preformulovať: V euklidovských priestoroch postupnosť bodov konverguje práve vtedy, keď konverguje po súradniciach.

9. Označme znakom l množinu všetkých takých postupností $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, pre ktoré rad $\sum_{i=1}^{\infty} | x_i |$ konverguje. Ak $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}, y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ sú dva body z l, položme

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} | x_i - y_i |.$$

a) Dokážte, že d_1 je metrika na priestore l.
b) Dokážte, že $l \subset l^{(2)}$ (pozri príklad 3.)
c) Takto na priestore l máme definované dve rôzne metriky d_1 a metriku d z príkladu 3. Je na mieste otázka, koľko metrík možno definovať na danej množine?

10. Označme $C(a, b)$ množinu všetkých spojitých funkcií, definovaných na intervale $< a, b >$. Presvedčte sa, že ak $f, g \in C$, tak funkcia

$$d(f, g) = \int_a^b | f(x) - g(x) | \, dx$$

je metrika na $C(a, b)$.

11. Nech S označuje množinu všetkých postupností reálnych čísel. Pre $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ položme:

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\mid x_i - y_i \mid}{1+ \mid x_i - y_i \mid}.$$

Dokážte, že d je metrika na S.

12. Nech $R = (-\infty, +\infty)$. Pre každú dvojicu $x, y \in R$ definujeme

$$d(x,y) = \sin^2 (x-y).$$

Je d metrika na R ?

13. Pre každé $x, y \in R$ definujeme

$$d(x,y) = \operatorname{arctg} \mid x - y \mid.$$

a) Ukážte, že d je metrika na R.
b) Ukážte, že táto metrika je ekvivalentná euklidovskej metrike na priamke.

14. Pre každé $x, y \in R$ definujeme:

$$d(x,y) = \sqrt{\mid x - y \mid}.$$

Je funkcia d metrika na R ?

15. $X = \{(a,b); a, b \in R\}$. Pre každé dva body $x = (a_1, b_1), y = (a_2, b_2)$ z priestoru X definujeme:

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \max\{\mid a_1 - a_2 \mid; \mid b_1 - b_2 \mid\} \\ d_2(x,y) &= \mid a_1 - a_2 \mid + \mid b_1 - b_2 \mid \\ d_3(x,y) &= \sqrt{(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2} \quad \text{(euklidovská metrika)} \end{aligned}$$

Ukážte:

a) Funkcie d_1 a d_2 sú tiež metriky.
b) Metriky d_1, d_2 a d_3 sú ekvivalentné.

16. Nech X je množina bodov kružnice k. Pre každú dvojicu $x, y \in X$ definujeme:
$d(x,y)$ = dĺžka kratšieho oblúka kružnice k, spájajúceho body x a y. Je d metrika na X ?

17. Nech (X, d) je metrický priestor. Pre každé $A, B \subset X, A, B \neq \emptyset$ položme:

$$d_1(A,B) = \inf\{d(a,b), a \in A, b \in B\}.$$

Je d_1 metrika na systéme všetkých podmnožín priestoru X ?

18. Označujeme $C(a,b)$ množinu všetkých spojitých funkcií, definovaných na $< a,b >$. Ak $f,g \in C(a,b)$, položme

$$d(f,g) = \sqrt{\int_a^b (f(x)-g(x))^2 dx.}$$

Je d metrika na $C(a,b)$?

19. Ukážte, že k ekvivatentnosti metrík d_1 a d_2, definovaných na priestore X stačí, aby existovali kladné konštanty a,b tak, že pre všetky $x,y \in X$ platí:

$$a.d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq b.d_1(x,y).$$

Ukážte, že táto podmienka nie je nutná k ekvivalentnosti metrík d_1 a d_2 !

20. Pseudometrikou nazveme takú funkciu $\overline{d}$, ktorá sa od metriky líši iba v tom, že $\bar{d}(x,y)$ sa môže rovnať nule aj pre $x \neq y$.

Nech $(X, \overline{d})$ je pseudometrický priestor.

Označme Y nasledujúci rozklad priestoru X:

Do jednej a tej istej triedy $A \in Y, A \subset X$ patria tie a len tie body x,y, pre ktoré $\overline{d}(x,y) = 0$. Pre $A,B \in Y$ definujeme:

$$d(A,B) = \bar{d}(a,b); a \in A, b \in B.$$

Dokážte, že d je metrika na priestore Y.

21. Nech (X,d) je metrický priestor. $\emptyset \neq A_1 \subset A_2$. Potom diam $A_1 \leq$ diam A_2. Dokážte!

22. Nech (X,d) je metrický priestor. Nech $A \subset X$. Označme

$$D(A) = \{d(x,y); x,y \in A\}.$$

Existuje taká trojprvková množina $A \subset E_2$, aby $D(A) = \{0,1\}$? Platí niečo podobné v $E_1 = R$?

23. Označme Q - množinu všetkých racionálnych čísel z intervalu $< 0,1 >$ a I - množinu všetkých iracionálnych čísel z intervalu $< 0,1 >$. Vypočítajte diam Q a diam I.

24. Nech $j_1 < j_2 < ...; k_1 < k_2 < ...$ sú dve rastúce postupnosti prirodzených čísel. Nech $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť bodov metrického priestoru (X,d) taká, že $\{x_{j_i}\}_{i=1}^{\infty}$ ak $\{x_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$ konvergujú k tomu istému bodu x_0. Nech zjednotenie množín $\{j_1, j_2, ...\}$ a $\{k_1, k_2, ...\}$ je množina všetkých prirodzených čísel. Potom aj postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ konverguje k bodu x_0. Dokážte!

25. Dokážte, že postupnosť $\{1 - \frac{1}{i}, \frac{2i}{3i+4}\}_{i=1}^{\infty}$ bodov euklidovského priestoru (E_2, d) konverguje k bodu $(1, \frac{2}{3}) \in E_2$!

26. Veta 1.4 nám hovorí, že napr. v euklidovských priestoroch (E_n, d) je konvergencia bodov ekvivalentná tzv. konvergencia po súradniciach. Majú podobnú vlastnosť i konvergencia v priestoroch $M, l^{(2)}, l$ z príkladov 2.,3. a 9.?

27. Na priestore E_n všetkých usporiadaných n-tíc zaveďme okrem euklidovskej metriky d_0 inú funkciu h:

Ak $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ sú dva body z E_n, tak $h(x, y) = \frac{1}{s}$, kde s je prvá súradnica, v ktorej sa body x a y líšia. Dokážte, že h je metrika na E_n!

28. Nech N je množina všetkých prirodzených čísel. Pre každé celé číslo $a \geq 0$ definujeme na $N \times N$ nasledujúce funkcie:

$$d_a(n, n) = 0, \text{ pre každé } n \in N,$$

$$d_a(m, n) = a + \frac{1}{m+n}, \text{ ak } m, n \in N,\ m \neq n.$$

Ukážte:

a) d_0 nie je metrikou na N.
b) d_a, pre $a \geq 1$ je metrikou na N.
c) Pre všetky $a, b \geq 1$ sú d_a, d_b ekvivalentné metriky.

29. V súvislosti s vetou 1.2 dokážte: Ak postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ metrického priestoru (X, d) nekonverguje k prvku $x \in X$, tak existuje taká čiastočná postupnosť $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, že žiadna jej čiastočná postupnosť nekonverguje k bodu x.