3. Priestory so spočítateľnou bázou, separabilné priestory. Úplné metrické priestory

Nech $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor. Systém množín $\mathcal{T}_0 \subset \mathcal{T}$ nazývame bázou topologického priestoru $(X, \mathcal{T})$, ak každá neprázdna množina z topológie $\mathcal{T}$ sa dá vyjadriť ako zjednotenie množín z $\mathcal{T}_0$.

Definícia 3.1. *Topologický priestor $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva priestor so spočitateľnou bázou, ak existuje spočitateľná báza topológie $\mathcal{T}$.*

Poznámka 3.1. Množinu M nazveme spočítateľnou, ak je konečná, alebo je ekvivalentná s množinou N všetkých prirodzených čísel, (t.j. ak existuje prosté zobrazenie množiny M na množinu N).

Definícia 3.2. *Topologický priestor $(X, \mathcal{T})$ sa nazýva separabilný, ak existuje spočítateľná množina $M \subset X$, ktorá je hustá v X.*

Veta 3.1. *Ak $(X, \mathcal{T})$ je topologický priestor so spočitateľnou bázou, tak $(X, \mathcal{T})$ je separabilný.*

Poznámka 3.2. Poslednú vetu nemožno vo všeobecnosti obrátiť.

Veta 3.2. *Nech (X, d) je metrický priestor. Označme $\mathcal{T}_d$ systém všetkých otvorených množín v priestore (X, d). ($\mathcal{T}_d$ sa nazýva topológia, odvodená od metriky d.) Potom priestor $(X, \mathcal{T}_d)$ má spočítateľnú bázu vtedy a len vtedy, keď (X, d) je separabilný.*

Definícia 3.3. *Postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodov metrického priestoru (X, d) sa nazýva fundamentálna, ak ku každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak,že pre každé $m, n > n_0$ je $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.*

Veta 3.3. *Každá konvergentná postupnosť bodov metrického priestoru je fundamentálna.*

Obrátené tvrdenie však nemusí platiť. Ak platí, tak:

Definícia 3.4. *Metrický priestor (X, d) budeme nazývať úplný,ak každá fundamentálna postupnosť prvkov tohoto priestoru konverguje v X.*

Veta 3.4. *(Cantorova). Nech (X, d) je úplný metrický priestor, nech $F_n \neq 0, n = 1, 2, ...$ sú uzavreté množiny v X. Nech $F_1 \supset F_2 \supset ... \supset F_n \supset F_{n+1} \supset ...$ a diam $F_n \to 0$, pre $n \to \infty$. Potom $\cap_{n=1}^{\infty} F_n \neq 0$.*

Veta 3.5. *(Baireova). Nech X je neprázdny úplný metrický priestor s metrikou d. Potom X je množina druhej kategórie v (X, d).*

Veta 3.6. *Metrický priestor (R, d_0) - reálna priamka s obvyklou metrikou - je úplný priestor.*

83. Ukážate, že vo vete 3.4 je $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ jednobodová nožina. Možno predpokladať diam $F_n \to 0$ vynechať?

84. Na reálnej priamke R uvažujeme metriku d:

$$d(x, y) = \text{arctg } \mid x - y \mid \text{ (porovnaj príklad 13.).}$$

Je (R, d) úplný priestor ?

85. Pre $m = 1, 2, ...$ označme $E_m = \{(a_1, a_2, ..., a_,), a_i$ - reálne$\}$. Nech d_0 označuje euklidovskú metriku na priestore E_m. Ukážte, že $(E_m, d_0), m \geq 2$ je úplný priestor. (Porovnaj príklad 8.)

86. Ukážte úplnosť priestorov $(X, d_1), (X, d_2)$ a (X, d_3) z príkladu 15.

87. Nech d_1 a d_2 sú ekvivalentné metriky na priestore X. Plynie z úplnosti priestoru (X, d_1) úplnosť priestoru (X, d_2)?

88. Nech (X, d) je ľubovoľný metrický priestor. Dokážte, že systém všetkých sfér $O(p, \delta), p \in X, \delta > 0, \delta \in Q, Q$ - racionálne čísla je báza topológie $\mathcal{T}_d$ priestoru $(X, \mathcal{T}_d)$, indukovaného metrickým prierstorom (X, d).

89. Dokážte, že metrické priestory $l^{(2)}, l$ a s (pozri príklady 3.,9. a 11.) sú separabilné metrické priestory.

90. Nech $(X_1, d_1), (X_2, d_2), ..., (X_n, d_n)$ sú metrické priestory. Dokážte, že ak priestory $X_1, X_2, ..., X_n$ sú separabilné, tak aj metrický priestor $X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$ (pozri definíciu 1.4) je separabilný. Platí aj obrátené tvrdenie?

91. Nech (X, d) je separabilný metrický priestor a nech $F \subset X$ je uzavretá množina v X. Zostrojte takú postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ prvkov priestoru X, aby platilo $L(x_1, x_2, ...) = F$. (Pozri príklad 44.)

92. Dokážte, že priestor M všetkých reálnych ohraničených postupností (pozri príklad 2) nie je separabilný, ale jeho podpriestor C všetkých konvergentných postupností je separabilný.

93. Nech $C(0, +\infty)$ označuje množinu všetkých spojitých ohraničených funkcií, definovaných na intervale $< 0, +\infty)$. Položme pre

$$f, g \in C(0, +\infty) : d(f, g) = \sup_{x \in <0, +\infty)} \mid f(x) - g(x) \mid \in C(0, +\infty).$$

a) Overte, že d je metrika na $C(0, +\infty)$ (porovnaj príklad 1).
b) Dokážte, že priestor $(C(0, +\infty), d)$ nie je separabilný.

94. Uvažujme priestor $C(a, b)$ všetkých spojitých funkcií definovaných na intervale $< a, b >$ (a teda i ohraničených) s obvyklou suprémovou metrikou. Dokážte, že $C(a, b)$ je separabilný metrický priestor. (Porovnaj s príkladom 93.)

95. Priestor $C(a,b)$ možno vybaviť aj inou metrikou:
ak $f, g \in C(a,b)$, položme

$$\varrho(f,g) = \int_a^b \mid f(x) - g(x) \mid dx.$$

(Porovnaj s príkladom 10.) $(C(a,b),\varrho)$ je metrický priestor. Dokážte, že $(C(a,b),\varrho)$ je separabilný.

96. Nech (X,d) je metrický priestor, $0 \neq M \subset X$, nech $\varepsilon > 0$, Hovoríme, že množina M je ε - sieťou priestoru X, ak pre každé $x \in X$ platí dist $(x, M) < \varepsilon$.
a) Dokážte, že množina M je ε - sieťou priestoru X vtedy a len vtedy, ak $X \subset \cup_{p\in M} O(p,\varepsilon)$.
b) Metrický priestor X je separabilný vtedy a len vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje taká spočitateľná množina M, ktorá je ε - sieťou. (Pozri ešte raz príklad 92 a 93.)

97. Metrický priestor (X,d) je separabilný vtedy a len vtedy, keď každý systém otvorených po dvoch disjunktných množín je spočitateľný. Dokážte!

98.
a) Dokážte, že podpriestor separabilného metrického priestoru je separabilný metrický priestor.
b) Na príklade ukážte, že pre topologické priestory už nemusí platiť analógia,t.j. podpriestor separabilného topologického priestoru nemusí byť separabilný topologický priestorom.

99. Ukážte, že topologický priestor $(R,\mathcal{T})$, spomínaný v návode 98. b), hoci je separabilný, nemá spočitateľnú bázu.

100. Je podpriestor úplného metrického priestoru úplný?

101. Nech (X,ϱ) je úplný metrický priestor, nech $Y \subset X, Y$ - uzavretá. Potom aj (Y,ϱ) je úplný metrický priestor. Platí aj obrátené tvrdenie?

102. Dokážte úplnosť nasledujúcich priestorov: $M(a,b)$ (príklad 1.), M (príklad 2.), l (príklad 9.), $l^{(2)}$ (príklad 3.) a S (príklad 11.).

103. Dokážte, že metrický priestor $C(a,b)$ z príkladu 10. (s integrálnou metrikou) nie je úplný.

104. Nech (X,d) je úplný metrický priestor, nech $x_0 \in X$. Je priestor $(X - \{x_0\}, d)$ úplný?

105. Je triviálny metrický priestor úplný? (Pozri príklad 9.).

106. Ako vieme, vo všeobecnosti z fundamentálnosti postupnosti ešte nevyplýva jej konvergencia. Čo treba ešte dodať? Platí: Ak $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ je fundamentálna postupnosť prvkov metrického pristoru (X,d) a existuje taká vybraná postupnosť $\{x_{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$, ktorá konverguje k bodu $x \in X$, tak aj pôvodná postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ konverguje ku x. Dokážte to!

107. Sú priestory $(Q,d_0),(Q',d_o)$ úplné? (Q - racionálne, Q' - iracionálne čísla, d_0 - euklidovská metrika.)

108. Nech Z označuje množinu všetkých komplexných čísel. Zvoľme $d(z, z') = \mid z - z' \mid$, pre $z, z' \in Z$. Dokážte, že (Z, d) je úplný metrický priestor.

109. Každá konvergentná postupnosť bodov metrického priestoru je ohraničená. Platí analógia i pre fundamentálne postupnosti?

110. Nech A a B sú úplné podpriestory metrického priestoru (X, d).
a) Dokážte, že $A \cup B$ i $A \cap B$ sú úplné podpriestory priestoru X.
b) Ukážte na príklade, že $A - B$ už nemusí byť úplný podpriestor.

111. Nech (X, d_X) a (Y, d_Y) sú úplné priestory. Dokážte, že priestor $X \times Y$, opatrený nasledujúcimi metrikami, je úplný:
a) $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(d_X(x_1, x_2))^2 + (d_Y(y_1, y_2))^2}$,
b) $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$.
V prípade a) porovnaj s euklidovským priestorom (E_2, d_0) - príklad 85.).

112. Dokážte, že prienik spočitateľného systému otvorených množín hustých v úplnom metrickom priestore X je množina hustá v X.

113. Ukážte na príklade, že tvrdenie príkladu 112. nemusí platiť, ak priestor X nie je úplný.

114. Nech $\mathcal{M}$ označuje spočitateľný systém množín typu G_δ, pričom každá z množín systému $\mathcal{M}$ je hustá v úplnom priestore X. Potom prienik množín systému $\mathcal{M}$ je množina typu G_δ a hustá v X. (Porovnaj s príkladom 112.)

115. Ukážte, že úplný metrický priestor X nemožno vyjadriť ako spočítateľné zjednotenie riedkych množín (t.j., že úplný metrický priestor je množina druhej kategórie - Baireova veta).

116. Nájdite príklad neúplného metrického priestoru, ktorý je prvej kategórie.

117. Uvažujeme Cantorovu množinu C z príkladu 30. textu. Je to uzavretá podmnožina reálnej priamky - teda úplný podpriestor. Ale C je prvej kategórie v R. Nie je to v spore s príkladom 115.?

118. Nech $E \subset R, E$ je spočítateľná a hustá v R. Potom množina E nie je typu G_δ. Dokážte!