4. Kompaktné priestory

Definícia 4.1. *Nech (X,d) je metrický priestor. Množina $A \subset X$ sa nazýva kompaktná, ak z každej postupnosti bodov množiny A možno vybrať čiastočnú postupnosť, ktorá konverguje v množine A (t.j. konverguje a jej limita patrí do A). Budeme hovoriť, že metrický priestor (X,d) je kompaktný, ak množina X je kompaktná.*

Uveďme aj topologickú variantu predchádzajúcej definície:

Veta 4.1. *Množina $A \subset X$ sa nazýva kompaktná, ak z každého pokrytia tejto množiny otvorenými množinami možno vybrať konečné podpokrytie.*

Veta 4.2.
a) *Každý kompaktný metrický priestor je separabilný a úplný.*
b) *Každá kompaktná podmnožina metrického priestoru je uzavretá.*
c) *Každá uzavretá podmnožina kompaktnej množiny je kompaktná množina.*

Definícia 4.2. *Topologický priestor $(X,\mathcal{T})$ sa nazýva súvislý, ak sa množina X nedá rozložiť na dve neprázdné otvorené disjunktné podmnožiny.*

Veta 4.3. *Topologický priestor $(X,\mathcal{T})$ nie je súvislý vtedy a len vtedy, keď v ňom existuje neprázdna obojaká (súčasne otvorená aj uzavretá) množina, rôzna od X.*

Veta 4.4. *Podmnožina reálnej priamky s obvyklou topológiou, obsahujúca aspoň dva rôzne body, je súvislá práve vtedy, keď je intervalom.*

119. Ak (X,d) je kompaktný metrický priestor, tak pre každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε - sieť priestoru X. (Pozri príklad 96.) Platí i obrátené tvrdenie?

120. Dokážte vetu 4.2.

121. Každá kompaktná množina je ohraničená, t.j. ak $A \subset X$, A - kompakt, tak diam $A < +\infty$. Dokážte!

122. Predchádzajúce príklady 120. a 121. nám hovoria, že každá kompaktná množina je uzavretá a ohraničená. Na vhodných príkladoch ukážte, že existujú uzavreté a ohraničené množiny, ktoré nie sú kompaktné!

123. Dokážte, že v každom euklidovskom priestore $(E_n, d_0), n = 1, 2, ...$ je množina $A \subset E_n$ kompaktná vtedy a len vtedy, keď A je uzavretá a ohraničená.

124. Dokážte, že množina A je kompaktná práve vtedy, ak každá jej nekonečná podmnožina má hromadný bod, patriaci do A.

125. Dokážte, že každý euklidovský priestor E_n je separabilný a úplný (pozri príklad 85.), ale nie je kompaktný! Porovnajte s vetou 4.2 a).

126. Nech $X_1, X_2, ..., X_m$ sú kompaktné metrické priestory. Je i priestor $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$ kompaktný?

127. Nech $A_1, A_2, ..., A_m$ sú kompaktné podmnožiny metrického priestoru X.
a) Dokážte, že $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m$ je kompakt v X.
b) Možno toto tvrdenie rozšíriť na nekonečne veľa množín?

128. Nech (X, d) je kompaktný metrický priestor a nech $F_k, k = 1, 2, ...$ sú neprázdne uzavreté podmnožiny X. Nech $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_k \supset \ldots$. Potom $\cap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \emptyset$. (Cantorova veta. Porovnaj s vetou 3.4.)

129. Vo vete 3.4 bol $\cap_{n=1}^{\infty} F_n$ jednobodová množina (pozri príklad 83.). Ukážte, že za predpokladov príkladu 128. môže byť $\cap_{k=1}^{\infty} F_k$ viac ako jednobodová množina.

130. Dokážte, že metrický priestor (X, d) je kompaktný vtedy a len vtedy, ak každé spočitateľné otvorené pokrytie priestoru X obsahuje konečné podpokrytie tohoto priestoru. (Porovnajte definíciu 4.1 a vetu 4.1.)

131. Nech (X, d) je metrický priestor. Ukážte, že metrická i topologická charakterizácia kompaktnej množiny sú ekvivalentné! (Pozri definíciu 4.1 a vetu 4.1.)

132. Nech (X, d) je úplný metrický priestor. Potom $A \subset X$ je kompaktná vtedy a len vtedy, ak A je uzavretá a pre každé $\varepsilon > 0$ obsahuje konečnú ε - sieť. (Pozri príklad 119.)

133. Dokážte, že topologický priestor $(X, \mathcal{T})$ je súvislý vtedy a len vtedy, keď ku každým dvom bodom $x, y \in X$ existuje taká súvislá množina $G \subset X$, že $x, y \in G$.

134.
a) Zostrojte metrický priestor, ktorý:
1. je úplný, ale nie je súvislý;
2. je súvislý, ale nie je úplný;
3. je kompaktný, ale nie je súvislý;
4. je súvislý, ale nie je kompaktný.
b) Zostrojte topologický priestor, ktorý:
5. je separabilný, ale nie je súvislý
6. je súvislý, ale nie je separabilný.

135. Nech E je súvislá množina, obsahujúca aspoň dva rôzne body. Dokážte, že E neobsahuje izolované body.

136. Dokážte, že priestor X je nesúvislý vtedy a len vtedy, ak existujú také neprázdne podmnožiny $A, B \subset X$, že platí: $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \neq \emptyset$.

137. Dokážte, že priestor X je nesúvislý vtedy a len vtedy, ak existujú neprázdne podmnožiny $A, B \subset X, A \cap B = \emptyset$, pričom obe sú uzavreté, alebo obe otvorené.

138.
a) Nech E je nesúvislá uzavretá množina. Potom možno rozložiť množinu E na : $E = A \cup B; A, B$ - uzavreté, $A, B \neq \emptyset, A \cap B = \emptyset$.
b) Ak E je nesúvislá otvorená množina. Potom existuje rozklad množiny E: $E = A \cup B; A, B$ - otvorené, $A, B \neq \emptyset A \cap B = \emptyset$.

139. Nech E, F - uzavreté množiny. Dokážte, že ak $E \cup F$ aj $E \cap F$ sú súvislé množiny, potom aj E a F sú súvislé.

140. Na príklade ukážte, že ak by v predchádzajúcom príklade aspoň jedna z množín A, B nebola uzavretá, potom tvrdenie nemusí platiť.

141. Dokážte:
a) Ak $A \subset X, A$ - súvislá, potom aj $\overline{A}$ je súvislá.
b) Obrátené tvrdenie nemusí platiť.

142. Nech A je súvislá. Potom každá množina $M : A \subset M \subset \overline{A}$ je tiež súvislá. Dokážte!

143. Nech $A \subset X$ a pre každé dva body $x, y \in A$ existuje súvislá množina $Q, Q \subset A$, $x, y \in Q$, potom A je súvislá v X. Dokážte!

144. Dokážte, že množina všetkých tých bodov euklidovskej roviny E_2, ktorých obe súradnice sú iracionálne, je nesúvislá!

145. Nech A označuje uzavretý kruh v rovine E_2. Dokážte, že A je súvislá množina!

146. Nech E_1 a E_2 sú súvislé množiny, $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, potom $E_1 \cup E_2$ je tiež súvislá množina. Dokážte!

147. Nech $E_1 \subset E_2 \subset ...$ je rastúca postupnosť súvislých množín. Potom $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ je súvislá. Dokážte!

148. Nech $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť súvislých množín. Nech pre každé $i = 1, 2, ...$ platí $E_i \cap E_{i+1} \neq \emptyset$. Potom aj množina $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ je súvislá. Dokážte!

149. Nech $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ je postupnosť neprázdnych súvislých množín a taká, že pre každé $i = 1, 2, ...$ je $E_i \cup E_{i+1}$ súvislá množina. Potom aj $\cup_{i=1}^{\infty} E_i$ je súvislá. Dokážte!

150. Dokážte, že množina všetkých tých bodov roviny E_2, ktorých aspoň jedna súradnica je racionálna, je súvislá.

151. Dokážte, že $E \subset R$ (reálna priamka) je súvislá vtedy a len vtedy, ak E je interval.

152. Nech (X, d) je súvislý metrický priestor. Potom X obsahuje len dve obojaké množiny a to $\emptyset$ a X. Dokážte!

153. Nech X a Y sú metrické priestory. V zmysle definície 1.4 uvažujeme metrický priestor $X \times Y$. Nech $E \subset X, F \subset Y, E, F$ neprázdne. Dokážte, že $E \times F$ je súvislá v $X \times Y$ vtedy a len vtedy, ak E a F sú súvislé v príslušných priestoroch X a Y.

154. Nech $A_t, t \in T$ je systém súvislých množín s neprázdnym prienikom. Potom množina $E = \cup_{t \in T} A_t$ je súvislá. Dokážte!

155. Neprázdnu podmnožinu A množiny E nazývame komponentou množiny E ak: A je súvislá a každá súvislá množina B, pre ktorú platí $A \subset B \subset E$ je už totožná s A.

Dokážte, že ku každému bodu $x \in E$ existuje práve jedna komponenta množiny E, obsahujúca bod x.

156. Nech $F \subset E, F \neq 0$ a F - súvislá. Dokážte, že existuje práve jedna komponenta množiny E, obsahujúca množinu F.

157. Dokážte, že každá komponenta uzavretej množiny je uzavretá množina.

158. Dokážte, že každú neprázdnu množinu E možno jednoznačne rozložiť na jej komponenty.